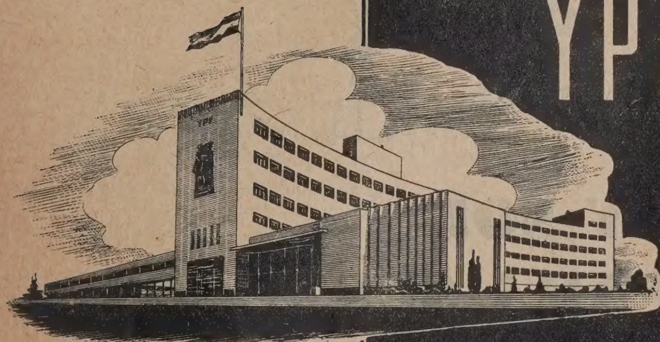
EL LABORATORIO DE INVESTIGACIONES YPF



...ORGANIZACION EFICIENTE
AL SERVICIO DEL PAIS

Este laboratorio, el mayor de Sudamérica. constituye una demostración irrefutable de la capacidad de los técnicos argentinos. Sus instalaciones —en su gran mayoría— fueron proyectadas y construídas en los propios talleres de Y P F.

El sabio sueco Svedberg —ganador del Premio Nóbel de Química y director del Instituto Físico-Químico de Upsala— declaró durante una reciente visita al país:
"que había quedado impresionado por la eficiencia de su "organización y la calidad de los equipos utilizados en las "investigaciones".

SECRETARIA DE INDUSTRIA Y COMERCIO DE LA NACION
YACIMIENTOS PETROLIFEROS FISCALES

SOBRE LA TEORIA DE LAS FUNCIONES SIMETRICAS

POR EL DOCTOR

ALBERTO E. SAGASTUME BERRA

1. **Introducción.** — En esta nota estudiamos las propiedades de ciertas funciones (polinomios) simétricas de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tales funciones son, en resumen, combinaciones lineales a coeficientes enteros de las llamadas *funciones simples*,

$$(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \Sigma\, x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n}. \qquad [1.1]$$

Aquí la sumatoria se extiende a todos los términos distintos que resulten de $x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$ al permutar las x_ν (o, lo que es lo mismo, las h_ν) de todas las maneras posibles. Por ejemplo, para $n = 3$,

$$(3, 2, 0) = x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_3^3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3.$$

En general en [1.1], donde los h_ν son enteros ≥ 0, se supondrán los términos de la suma ordenados lexicográficamente, de modo que, en particular,

$$h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_n \geq 0\,, \qquad [1.2]$$

pues el término que figura escrito en [1.1] es el primero o más «alto» en la ordenación lexicográfica. Es evidente que tal término y la función [1.1] se determinan biunívocamente, lo cual justifica la notación $(h_1, \ldots, h_n)$. Por otra parte, esto permite considerar ordenadas lexicográficamente a las funciones simples mismas.

Entre éstas, son importantes las *funciones simétricas elementales* σ_ν, definidas por:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_0 = 1\,,\ \sigma_1 = \Sigma x_1 = (10\ldots0)\,,\ \sigma_2 = \Sigma x_1 x_2 = (110\ldots0), \\ \quad\ldots,\ \sigma_\nu = \Sigma x_1 \ldots x_\nu = (1\ldots10\ldots0), \ldots \\ \quad\quad \sigma_n = x_1 x_2 \ldots x_n = (1,1,\ldots,1). \end{array}\right\} \quad [1,3]$$

Las funciones simples cumplen el oficio de intermediarias para expresar una función simétrica cualquiera mediante las funciones elementales, lo cual, como es sabido, es siempre posible, y de una sola manera (teorema fundamental de las funciones simétricas). El número

$$g = h_1 + h_2 + \ldots + h_n \qquad [1.4]$$

(que no es sino el grado del polinomio [1.1] en las x_ν) se llama el *peso* del correspondiente polinomio en las σ_ν. Si [1.1] se expresa en las σ_ν así:

$$(h_1, h_2, \ldots h_n) = \sum_{(\mu)} \alpha_\mu \, \sigma_0^{\mu_0} \, \sigma_1^{\mu_1} \ldots \sigma_n^{\mu_n}, \qquad [1.5]$$

se tiene:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_n \\ g &= 0 \,.\, \mu_0 + 1 \,.\, \mu_1 + \ldots + n \,.\, \mu_n \end{aligned}\right\} \qquad [1.6]$$

y en general, a un polinomio homogéneo en las x_ν de grado g, corresponde uno *isobárico* de peso g en las σ_ν y viceversa. Nótese que, como $\sigma_0 = 1$, el exponente μ_0 no tiene importancia en [1.5] ni en la segunda relación [1.6], de modo que la primera sirve para *definir* μ_0. La utilidad de esta definición se verá más adelante, especialmente para una ley de *dualidad* (§ 5) y en cuestiones relativas a discriminantes (§ 7).

2. Funciones simétricas dobles. — Queremos ahora interpretar el adjetivo « simple » atribuído a las funciones [1.1], en el sentido de « a simple entrada » o « a una dimensión » o « a un índice » para significar que cada función simple está definida por una « fila » de números (los h_ν) que dependen de un solo índice.

Generalicemos ahora esta noción. Supongamos dada una matriz (cuadro a doble entrada o a dos índices) $\| h_{ij} \|$, de n filas y n columnas, cuyos elementos h_{ij} (i caracteriza la fila, j la columna) son números enteros no negativos que además cumplen las condiciones:

$$h_{ij} \geq h_{i,\,j+1} \quad , \quad h_{ij} \geq h_{i+1,\,j} \quad , \quad h_{nn} \geq 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n) \qquad [2.1]$$

En cada fila o en cada columna, pues, los elementos decrecen, conservándose ≥ 0. Nuestra matriz puede entonces dividirse en submatrices compuestas de elementos todos iguales entre sí, de

modo que sean las mayores que cumplan tal condición. Por ejemplo, para $n = 6$.

$$\| h_{ij} \| = \left\| \begin{array}{c:c:c} 77 & 555 & 2 \\ \hdashline 55 & 444 & 2 \\ 55 & 444 & 2 \\ 55 & 444 & 2 \\ \hdashline 33 & 111 & 0 \\ \hdashline 11 & 111 & 0 \end{array} \right\|, \qquad [2.2]$$

donde las submatrices han sido separadas por líneas punteadas. Llamaremos *equivalentes* a los elementos (iguales entre sí) que componen cada submatriz. Así, en el ejemplo [2.2], los dos 7 son equivalentes, lo mismo que los dos 3 o los nueve 4; en cambio hay *dos* tipos de 2, o de 5, o de 0, inequivalentes, y *tres* tipos de 1 inequivalentes.

La misma notación de la matriz, $\| h_{ij} \|$, servirá para designar la *función simétrica doble* (o a dos dimensiones) determinada por la matriz, y que pasamos a definir. *La función simétrica doble* $\| h_{ij} \|$ *es una combinación lineal de funciones simples.*

$$\| h_{ij} \| = \sum_{(i)(j)} \alpha_{(i)(j)} \, (h_{i_1 j_1}, \ldots, h_{i_n j_n}), \qquad [2.3]$$

donde $i_1, \ldots, i_n$; $j_1, \ldots, j_n$ *son pemutaciones de los índices* $1, \ldots, n$ *(vale decir, las* $h_{i_k j_k}$ *se toman una de cada fila y de cada columna de la matriz, como si se tratase de desarrollar un determinante). En* [2.3], *(*i*) indica la permutación* $i_1, \ldots, i_n$ *y análogamente (*j*). El coeficiente* $\alpha_{(i)(j)}$ *es un entero que indica el número de veces que el sistema de números* $h_{i_1 j_1}, \ldots, h_{i_n j_n}$ *puede obtenerse de la matriz, no considerándose distintas dos combinaciones cuando se obtengan permutando elementos equivalentes.*

Por ejemplo, para la matriz [2.2] calculemos el coeficiente de (754410). El 7 lo tomamos en la primera fila y 1ª ó 2ª columnas, por ejemplo en la 1ª (ya que son equivalentes, y por lo tanto es indiferente tomar uno u otro). El 5 que sigue se tomará necesariamente de la 2ª columna, y fila 2ª (ó 3ª ó 4ª, indistintamente). Siguen análogamente los dos 4, y finalmente el 1 puede tomarse de la 5ª línea y el 0 de la 6ª o viceversa; y como éstos son elementos inequivalentes, el coeficiente es 2.

Prosiguiendo así, se halla el desarrollo:

$$\left\|\begin{array}{c|c|c} 77 & 555 & 2 \\ \hline 55 & 444 & 2 \\ 55 & 444 & 2 \\ 55 & 444 & 2 \\ 55 & 444 & 2 \\ \hline 33 & 111 & 0 \\ \hline 11 & 111 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} = 2\,(754410) + 2\,(754211) + (744430) + \\ + (744410) + (744321) + 2\,(744211) + \\ + 6\,(555410) + 6\,(555211) + 2\,(554430) + \\ + 2\,(554321) + 6\,(554211) + 2\,(544321) + \\ + 2\,(544211) + (444231). \end{array}$$

Desarrollando esta expresión según [1.1] se obtendrían 3060 términos [1].

Se podrían definir por procedimientos parecidos, funciones *triples*, *cuádruples*, ... (a tres, cuatro, ... dimensiones).

3. **Funciones dobles homogéneas.** — Las funciones realmente importantes entre las que acabamos de definir, son las funciones dobles *homogéneas*. Se llama así a una función simétrica doble [2.3] cuando *todos sus términos son de igual peso* [1.4]; es decir que

$$g = h_{i_1 j_1} + h_{i_2 j_2} + \ldots + h_{i_n j_n} \qquad [3.1]$$

es independiente de las permutaciones $i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_n$. El número g puede entonces llamarse el *peso de la función* $\| h_{ij} \|$.

Teorema I: *La condición de que* $\| h_{ij} \|$ *sea homogénea equivale a cualquiera de las siguientes*:

a) La diferencia entre elementos correspondientes de dos filas (o columnas) consecutivas sólo depende de las filas (columnas), pero es la misma para todos los pares de elementos de ellas:

$$\left.\begin{array}{l} h_{ij} - h_{i+1,j} = f_i \geq 0 \;\; (i = 1, \ldots, n-1;\; j = 1, \ldots, n) \\ h_{ij} - h_{i,j+1} = c_j \geq 0 \;\; (i = 1, \ldots, n;\; j = 1, \ldots, n-1) \end{array}\right\}. \qquad [3.2]$$

b) Existen números enteros no negativos h $(h_{nn} = h)$, f_i, c_j $(i, j = 1, \ldots, n-1)$ *tales que*

$$h_{ij} = h + \sum_{k=i}^{n-1} f_k + \sum_{l=j}^{n-1} c_l. \qquad [3.3]$$

[1] Si en (1,1) es $h_1 = \ldots = h_{\nu_1} > h_{\nu_1+1} = \ldots = h_{\nu_1+\nu_2} > \ldots$, la función simple $(h_1, \ldots, h_n)$ consta de $\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\ldots}$ términos. Por ej. (555211) consta de $\frac{6!}{3!\,2!} = 60$ términos.

En tal caso, el peso g de $\| h_{ij} \|$ es

$$g = nh + \sum_{k=1}^{n-1} k\,(f_k + c_k)\,. \qquad [3.4]$$

DEM.: Sea $\| h_{ij} \|$ homogénea, con el desarrollo [2.3] y de peso [3.1]. En cualquiera de estas fórmulas pueden reordenarse las $h_{i_r j_r}$ y suponerse $i_1 = 1,\ i_2 = 2,\ \ldots,\ i_n = n$. Tomemos uno de los términos $(h_{1 j_1}, h_{2 j_2}, \ldots, h_{n j_n})$ en que dos de las j contiguas sean consecutivas; por ej.: $j_i = r,\ j_{i+1} = r + 1$. También $(h_{1, j_1}, \ldots, h_{i, r+1}, h_{i+1, r}, \ldots, h_{n, j_n})$ aparece en otro término, y como ambos son de igual peso, resulta

$$g = \sum_{\nu \neq i, i+1} h_{\nu, j_\nu} + h_{i,r} + h_{i+1, r+1} = \sum_{\nu \neq i, i+1} h_{\nu, j_\nu} + h_{i, r+1} + h_{i+1, r}$$

de donde

$$h_{i,r} - h_{i+1, r} = h_{i, r+1} - h_{i+1, r+1} = f_i$$

que resulta así independiente de r. Análogamente se obtiene la segunda de las [3.2].

Si se cumplen las [3.2], es inmediato que, llamando h a h_{nn}, se verifican también las [3.3]. Pero entonces, si $(h_{1 j_1}, \ldots, h_{n, j_n})$ es uno de los términos de [2.3], se tiene que el peso de este término es

$$\sum_{i=1}^{n} h_{i, ji} = nh + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} f_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=ji}^{n-1} c_l = nh + \sum_{k=1}^{n-1} k f_k + \sum_{l=1}^{n-1} l c_l.$$

(habiendo tenido en cuenta que $j_1, \ldots, j_n$, es una permutación de los índices $1, \ldots, n$). Es decir, el peso tiene el valor [3.4], independiente de la permutación (j). La función $\| h_{ij} \|$ es homogénea. c.q.d.

La importancia de las funciones homogéneas se hace manifiesta con el

TEOREMA II: *Todo producto de dos funciones simétricas simples es una función simétrica doble homogénea. Recíprocamente, toda función doble homogénea puede expresarse, a lo sumo de $h+1$ maneras distintas ($h = h_{nn}$) como producto de dos funciones simples.*

DEM.: Sea el producto $(h_1, \ldots, h_n) \cdot (k_1, \ldots, k_n)$. Todos los términos de tal producto se obtienen multiplicando uno de los términos $x_{p_1}^{h_1}, x_{p_2}^{h_2} \ldots x_{p_n}^{h_n}$ del primer factor por otro $x_{q_1}^{k_1} x_{q_2}^{k_2} \ldots x_{q_n}^{k_n}$ del segundo. Tales términos tienen, pues, la forma $x_1^{l_1}, \ldots x_n^{l_n}$ donde cada

l es suma de una h y una k; y recíprocamente. Si ponemos entonces

$$h_{ij} = h_i + k_j \quad (i, j = 1, \ldots, n), \qquad [3.5]$$

los términos del desarrollo de $||h_{ij}||$ son justamente los $x_1^{l_1}, \ldots x_n^{l_n}$ Se trata de demostrar que los coeficientes son los mismos en ambos desarrollos.

Efectivamente: si imaginamos el producto expresado mediante funciones simples, un término $\beta_{(i)(j)}(h_{i_1 j_1}, \ldots, h_{i_n j_n})$ tiene como coeficiente $\beta_{(i)(j)}$ el mismo que el del término principal $\beta_{(i)(j)} x_1^{h_{i_1 j_1}} \ldots x_n^{h_{i_n j_n}}$, y $\beta_{(i)(j)}$ significa entonces el número de veces que este término principal se obtiene como producto de dos términos de los factores, o sea, según [3.5], el número de veces que $h_{i_r} + k_{j_r}$ da el valor $h_{i_r j_r}$, simultáneamente para todo r. Pero éste es justamente el número de veces que el sistema $(h_{i_1 j_1}, \ldots, h_{i_n j_n})$ puede obtenerse de la matriz $||h_{ij}||$, sin tener en cuenta elementos equivalentes (pues éstos corresponden a términos que figuran sólo una vez en las funciones simples), o sea el correspondiente $\alpha_{(i)(j)}$ del desarrollo [2.3].

La matriz $||h_{ij}||$ definida por [3.5] cumple obviamente las [3.2] y es por tanto homogénea. Nótese que, con las notaciones del Teor. I, en este caso se tiene:

$$h = h_n + k_n \quad , \quad f_i = h_i - h_{i+1} \quad , \quad c_j = k_j - k_{j+1} \,. \qquad [3.6]$$

Recíprocamente, sea dada una matriz homogénea $||h_{ij}||$. Para ella están definidas las f_i, c_j y se cumplen las fórmulas del Teor. I. Elijamos un entero entre 0, 1, 2, ..., h ($= h_{nn}$), llamémoslo h_n, y deteminemos sucesivamente $h_{n-1}, \ldots, h_1; k_n, k_{n-1}, \ldots, k_1$ de manera que verifiquen [3.6]. Por [3.3] resulta entonces inmediatamente $h_{ij} = h_i + k_j$ y, por lo ya demostrado, $||h_{ij}|| = (h_1, \ldots, h_n)$. $(k_1, \ldots, k_n)$. Como la elección de h, puede hacerse de $h+1$ maneras, mientras que las restantes h_i, k_j resultan unívocamente determinadas, tendremos $h + 1$ productos (tal vez no todos distintos) representados por la matriz dada $||h_{ij}||$. c.q.d.

En particular una matriz homogénea $||h_{ij}||$ con $h = 0$ se expresa *unívocamente* como producto de dos funciones simples.

Ejemplo: Para $n = 4$:

$$(3322)\,.\,(1100) = \left\| \begin{array}{c|c} 44 & 33 \\ 44 & 33 \\ \hline 33 & 22 \\ 33 & 22 \end{array} \right\| = (4422) + 2\,(4332) + 6\,(3333)$$

Viceversa, dada esta matriz, según se tome $h_n = 2$, 1 ó 0, se obtienen las siguientes representaciones como producto (sólo dos esencialmente distintas):

$$\left\| \begin{array}{c|c} 44 & 33 \\ 44 & 33 \\ \hline 33 & 22 \\ 33 & 22 \end{array} \right\| = (3322) \,.\, (1100) = (2211)^2 = (1100) \,.\, (3322) \,.$$

4. **Algunos productos particulares.** — La fórmula establecida en el § 3,

$$(h_1, \ldots, h_n) \,.\, (k_1, \ldots, k_n) = \| h_i + k_j \| \qquad [4.1]$$

presenta algunos casos particulares interesantes, y que permiten simplificar los demás. En primer lugar, si $k \leq h_n$ y aplicamos [4.1] al producto $(h_1 - k,\ h_2 - k, \ldots, h_n - k) \,.\, (k, k, \ldots, k)$ resulta la matriz $\|h_i\|$, cuyo desarrollo se reduce evidentemente a $(h_1, \ldots, h_n)$. Así:

$$(h_1 - k, \ldots, h_n - k) \,.\, (k, k, \ldots k) = (h_1, \ldots, h_n)$$

En particular:

$$(k, k, \ldots, k) = (k - 1, \ldots, k - 1) \,.\, (1, \ldots, 1) =$$
$$= \ldots = (1, \ldots, 1)^k = \sigma_n^k ,$$

con lo cual la fórmula anterior se completa en:

$$(h_1, h_2, \ldots h_n) = (h_1 - k, \ldots, h_n - k) \,.\, (k, \ldots, k) =$$
$$= (h_1 - k, \ldots, h_n - k)\ \sigma_n^k , \qquad [4.2]$$

y a su vez para $k = h_n$:

$$(h_1, h_2, \ldots, h_n) = (h_1 - h_n, h_2 - h_n, \ldots, 0) \,.\, \sigma_n^{h_n} . \qquad [4.3]$$

Se puede demostrar algo análogo para las funciones dobles: si $k \leq h_{nn}$ y la función doble $\| h_{ij} \|$ tiene el desarrollo [2.3], se tiene evidentemente:

$$\| h_{ij} - k \| \,.\, (k, \ldots, k) = (k, \ldots, k) \,.\, \sum_{(i)(j)} \alpha_{(i)(j)} \,(h_{i_1 j_1} - k, \ldots, h_{i_n j_n} - k) =$$
$$= \sum_{(i),(j)} \alpha_{(i)(j)} \,(h_{i_1 j_1}, \ldots, h_{i_n j_n}) = \| h_{ij} \|$$

ya que es evidente que a elementos equivalentes en $\| h_{ij} - k \|$ corresponden elementos equivalentes en $\| h_{ij} \|$ y viceversa, y por tanto los desarrollos de ambas matrices tienen iguales los coeficientes correspondientes. Se tiene, pues:

$$\| h_{ij} \| = \| h_{ij} - k \| \,.\, (k, k, \ldots, k) = \| h_{ij} - k \| \,.\, \sigma_n^k \quad (k \leq h_{nn}) \qquad [4.4]$$

y en particular:

$$\| h_{ij} \| = \| h_{ij} - h \| \,.\, \sigma_n^h \quad (h = h_{nn}) \,. \qquad [4.5]$$

Las fórmulas [4.3] y [4.5] muestran que en la consideración de las funciones simples o dobles, *podemos reducirnos a aquellas cuyo último elemento sea* 0, multiplicando por una conveniente potencia de σ_n

Esto explica la diversidad de productos que representa (Teor. II) una función doble homogénea: si $h > 0$, dicha función tiene un factor σ_n^h, del cual una parte, $\sigma_n^{h-\lambda}$, puede atribuirse al primer factor del producto, y la otra, σ_n^λ, al segundo.

5. **Dualidad.** — Existe una interesante ley, que llamaremos de *dualidad*, que permite, de una función simple o doble, o de un desarrollo en funciones simples, deducir inmediatamente otros.

Dada una combinación lineal de funciones simples

$$F = \sum_{(h)} \alpha_{(h)} \, (h_1, \ldots, h_n) \,, \qquad [5.1]$$

llamaremos *dual* de F respecto al entero c ($\geq$ el mayor de los h_1), a la función

$$F^{(c)} = \sum_{(h)} \alpha_{(h)} \, (c - h_n \,,\; c - h_{n-1} \,, \ldots, c - h_1) \,. \qquad [5.2]$$

Es evidente que ésta es una operación *lineal*:

$$(\alpha F + \beta G)^{(c)} = \alpha \,.\, F^{(c)} + \beta \,.\, G^{(c)} \qquad [5.3]$$

Además:

$$(F^{(c)})^{(d)} = \sigma_n^{d-c} \,.\, F \qquad [5\ 4]$$

y en especial

$$(F^{(c)})^{(c)} = F \,. \qquad [5\ 5]$$

En particular, está definida la función dual de una doble cualquiera. Se puede demostrar que

$$\| h_{ij} \|^{(c)} = \| c - h_{n-i,\, n-j} \| \,. \quad (c \geq h_{11}) \,. \qquad [5.6]$$

En efecto:

$$\| h_{ij} \|^{(c)} = \Big[\sum_{(i),(j)} \alpha_{(i)(j)} \, (h_{i_1,\, j_1}, \ldots, h_{i_n j_n}) \Big]^{(c)} =$$

$$= \sum_{(i)(j)} \alpha_{(i)(j)} \, (c - h_{i_n j_n}, \ldots, c - h_{i_1,\, j_1}) = \| c - h_{n-i,\, n-j} \| \,.$$

Si

$$G = \sum_{(k)} \beta_{(k)} \, (k_1, \ldots, k_n)$$

es otra combinación de funciones simples, y $d \geq \textit{máx.}\, k_1$, de modo que

$$G^{(d)} = \sum_{(k)} \beta_{(k)} \, (d - k_n, \ldots, d - k_1)$$

se tiene, multiplicando por [5.2]:

$$F^{(c)} G^{(d)} = \sum_{(h)(k)} \alpha_{(h)} \, \beta_{(k)} \, \| c + d - h_{n-i} - k_{n-j} \| = \sum_{(h)(k)} \alpha_{(h)} \, \beta_{(k)} \, \| h_i + k_j \|^{(c+d)},$$

a causa de [5.6]. Es decir:

$$F^{(c)} G^{(d)} = (FG)^{(c+d)} \,. \qquad [5.7]$$

Conviene notar explícitamente que la [5.2] define también $(0, 0, \ldots, 0)^{(c)} = \sigma_0^{(c)} = (c, c, \ldots, c) = \sigma_n^c$ para todo $c \geq 0$.

Demostraremos ahora el

Teorema III: *Para las funciones duales de las potencias de las* σ_ν *se tiene la fórmula general*:

$$\left.\begin{array}{l} (\sigma_\nu^\mu)^{(\mu+\lambda)} = \sigma_{n-\nu}^\mu \,.\, \sigma_n^\lambda \\ \nu = 0, 1, \ldots, n \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots \;;\; \lambda = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \qquad [5.8]$$

Dem.: *a*) La fórmula $\sigma_0^{(c)} = \sigma_n^c$, válida, como hemos observado, para todo $c \geq 0$, es el caso $\nu = 0$ de [5.8].

b) Para $\nu = 1, \ldots, n$ y $\lambda = 0$, demostramos [5.8], esto es:

$$(\sigma_\nu^\mu)^{(\mu)} = \sigma_{n-\nu}^\mu \qquad [5.9]$$

por inducción respecto a μ. Para $\mu = 0$ ó 1, [5.9] vale, pues

$$(\sigma_\nu^0)^{(0)} = 1^{(0)} = \sigma_0^{(0)} = \sigma_n^{(0)} = \sigma_{n-\nu}^0 = 1 ;$$

$$\sigma_\nu^{(1)} = (\underbrace{1 \ldots 1}_{\nu}0 \ldots 0)^{(1)} = (1 \ldots \underbrace{10 \ldots 0}_{\nu}) = \sigma_{n-\nu} .$$

Admitida la [5.9] para un μ, vale para $\mu + 1$, pues por [5.7]

$$(\sigma_\nu^{\mu+1})^{(\mu+1)} = (\sigma_\nu^\mu \,.\, \sigma_\nu)^{(\mu+1)} = (\sigma_\nu^\mu)^{(\mu)} \,.\, \sigma_\nu^{(1)} = \sigma_{n-\nu}^\mu \,.\, \sigma_{n-\nu} = \sigma_{n-\nu}^{\mu+1} .$$

c) Demostrada así la [5.8] para $\lambda = 0$ y todos los valores de μ, ν, resulta de inmediato para todo λ; pues, siempre a causa de [5.7] y de lo ya demostrado, se tiene:

$$(\sigma_\nu^\mu)^{(\mu+\lambda)} = (\sigma_\nu^\mu \,.\, \sigma_0^\lambda)^{(\mu+\lambda)} = (\sigma_\nu^\mu)^{(\mu)} \,.\, (\sigma_0^\lambda)^{(\lambda)} = \sigma_{n-\nu}^\mu \,.\, \sigma_n^\lambda \quad \text{c. q. d.}$$

TEOREMA IV: *Sea F una función simétrica, cuya expresión mediante las funciones elementales sea*

$$F = \sum_{(\mu)} \alpha_{(\mu)} \, \sigma_0^{\mu_0} \, \sigma_1^{\mu_1} \ldots \sigma_n^{\mu_n} , \qquad [5.10]$$

(donde los μ_0 son arbitrarios). Sea c un entero $\geq$ el máximo de los $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, de modo que tiene sentido (1) *$F^{(c)}$. En cada término pongamos*

$$\left.\begin{array}{l} \mu_0 = c - \mu_1 - \ldots - \mu_n \qquad (\geq 0) \\ \text{Entonces} \\ F^{(c)} = \sum_{(\mu)} \alpha_\mu \, \sigma_0^{\mu_n} \, \sigma_1^{\mu_{n-1}} \ldots \sigma_n^{\mu_0} \end{array}\right\} \qquad [5.11]$$

DEM.: Según [5.3], [5.7], [5.8], se tiene:

$$F^{(c)} = \sum_{(\mu)} \alpha_\mu \, (\sigma_0^{\mu_0} \ldots \sigma_n^{\mu_n})^{(c)} = \sum_{(\mu)} \alpha_\mu \, (\sigma_0^{\mu_0})^{(\mu_0)} \ldots (\sigma_n^{\mu_n})^{(\mu_n)} =$$

$$= \sum_{(\mu)} \alpha_\mu \, \sigma_n^{\mu_0} \, \sigma_{n-1}^{\mu_1} \ldots \sigma_0^{\mu_n}, \quad \text{c. q. d.}$$

COROLARIO: *Si*

$$(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \sum_{(\mu)} \alpha_\mu \, \sigma_0^{\mu_0} \, \sigma_1^{\mu_1} \ldots \sigma_n^{\mu_n}$$

(1) Es obvio que, expresando σ_ν^μ mediante las funciones simples, tal expresión comienza con un término (el de mayor rango) de la forma $(\mu, \mu, \ldots)$; asimismo, $\sigma_1^{\mu_1} \sigma_2^{\mu_2} \ldots \sigma_n^{\mu_n}$ comienza con un término $(\mu_1 + \ldots + \mu_n, \mu_1 + \ldots + \mu_n, \ldots)$. Véase § 8.

donde μ_0 *está definido por* [1.6], *se tiene*

$$(h_1 - h_n, h_1 - h_{n-1}, \dots, h_1 - h_2, 0) = \sum_{(\mu)} \alpha_\mu \, \sigma_0^{\mu_n} \, \sigma_1^{n_1} \dots \sigma_n^{\mu_0}$$

Esto no es sino el caso $F = (h_1, \dots, h_n)$, $c = h_1$ del Teor. IV.

6. **Ejemplos.** Supongamos $n = 5$ y que se quiera expresar (44321) mediante las funciones simétricas elementales. Podríamos observar que $(44321) = (33210) \,.\, \sigma_5$ (fórmula [4.3]) pero resulta aún más simple tener en cuenta que $(44321) = (32100)^{(4)}$. El cálculo de (32100) se hace según el esquema conocido: esta función se obtiene como primer término del desarrollo de $\sigma_1^{3-2}\, \sigma_2^{2-1}\, \sigma_3^{1-0}\, \sigma_4^{0-0}\, \sigma_5^{0} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$. Calculemos esta función:

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = (10000)\,(11000)\,(11100) = \left\| \begin{array}{c|c} 2 & 1111 \\ 2 & 1111 \\ \hline 1 & 0000 \\ 1 & 0000 \\ 1 & 0000 \end{array} \right\| \,.\, (11100) =$$

$$= [(21000) + 3\,(11100)] \,.\, (11100) =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & 111 \\ 3 & 2 & 111 \\ 3 & 2 & 111 \\ \hline 2 & 1 & 000 \\ 2 & 1 & 000 \end{array} \right\| + 3 \left\| \begin{array}{c|c} 222 & 11 \\ 222 & 11 \\ 222 & 11 \\ \hline 111 & 00 \\ 111 & 00 \end{array} \right\| = (32100) + 3\,(31110) + 3(22200) + 8(22110) + 22\,(21111) \qquad [6.1]$$

Para eliminar 3(31110) habrá que restar $3\,\sigma_1^2\,\sigma_4$. Calculemos ésta:

$$-3\,\sigma_1^2\,\sigma_4 = -3 \left\| \begin{array}{c|c} 2 & 1111 \\ \hline 1 & 0000 \\ 1 & 0000 \\ 1 & 0000 \\ 1 & 0000 \end{array} \right\| (11110) = -3\,[(20000) + 2\,(11000)]\,(11110) =$$

$$= -3 \left\| \begin{array}{c|c} 3 & 1111 \\ 3 & 1111 \\ 3 & 1111 \\ 3 & 1111 \\ \hline 2 & 0000 \end{array} \right\| - 6 \left\| \begin{array}{c|c} 22 & 111 \\ 22 & 111 \\ 22 & 111 \\ 22 & 111 \\ \hline 11 & 000 \end{array} \right\| =$$

$$= -3\,(31110) + 0\,(22200) - 6\,(22110) - 27\,(21111) \qquad [6.2]$$

Si sumáramos [6.1] y [6.2] quedarían en el segundo miembro términos 3 (22200) + ... Para eliminarlos, calculamos sucesivamente, por los mismos procedimientos:

$$\left.\begin{aligned} -3\,\sigma_3^2 &= -3\,(22200) - 6\,(22110) - 18\,(21111) \\ +4\,\sigma_2\,\sigma_4 &= 4\,(22110) + 16\,(21111) \\ +7\,\sigma_1\,\sigma_5 &= 7\,(21111) \end{aligned}\right\} \qquad [6.3]$$

Sumando miembro a miembro [6.1], [6 2], [6.3] se llega a la expresión buscada, que escribiremos:

$$(32100) = \sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 3\,\sigma_0\sigma_1^2\sigma_4 - 3\,\sigma_0^2\sigma_3^2 + 4\,\sigma_0^2\sigma_2\sigma_4 + 7\,\sigma_0^2\sigma_1\sigma_5 .$$

Entonces, aplicando el Teor. IV:

$$(44321) = (23100)^{(4)} = \sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5 - 3\,\sigma_1\sigma_4^2\sigma_5 - 3\,\sigma_2^2\sigma_5^2 + \\ + 4\,\sigma_1\sigma_3\sigma_5^2 + 7\,\sigma_0\sigma_4\sigma_5^2 .$$

Asimismo, suprimiendo el factor σ_5, se obtiene:

$$(33210) = \sigma_2\sigma_3\sigma_4 - 3\,\sigma_1\sigma_4^2 - 3\,\sigma_2^2\,\sigma_5 + 4\,\sigma_1\sigma_3\sigma_5 + 7\,\sigma_4\sigma_5 .$$

Si de aquí calculamos la expresión dual respecto a 3, recaemos, naturalmente, en (32100).

De [6.1], por ejemplo, tomando la dual respecto a 3, se tiene por [5.9]:

$$\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = (33210) + 3\,(32220) + 3\,(33111) + 8\,(32211) + 22\,(22221).$$

7. **Algunas propiedades de los discriminantes.** — Una función simétrica muy importante es el *discriminante* D_n, que se puede definir como el producto de los cuadrados de las diferencias $x_i - x_j$ para todos los valores $i, j = 1, \ldots, n$ con $i < j$. Supuesto expresado en las σ_ν,

$$D_n = \sum_{(\mu)} \alpha_{(\mu)}\, \sigma_0^{\mu_0}\, \sigma_1^{\mu_1} \ldots \sigma_n^{\mu_n}, \qquad [7.1]$$

es sabido que D_n es *isobárico de peso* $n\,(n-1)$, es decir,

$$0 \,.\, \mu_0 + 1 \,.\, \mu_1 + \ldots + n \,.\, \mu_n = n\,(n-1) \qquad [7.2]$$

Definiremos además μ_0 en cada término de modo que D_n sea también *homogéneo* (como polinomio en las σ_ν) de grado $2\,(n-1)$, o sea:

$$\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_n = 2\,(n-1) \qquad [7.3]$$

Si multiplicamos [7.3] por n y restamos [7.2], resulta

$$0 \,.\, \mu_n + 1 \,.\, \mu_{n-1} + \ldots + n\mu_0 = n\,(n-1)\,,$$

que junto con [7.3] se puede interpretar así: si $\sigma_0^{\mu_0} \ldots \sigma_n^{\mu_n}$ (con un coeficiente numérico $\alpha_{(\mu)}$) es un término « posible » del discriminante D_n, también $\sigma_0^{\mu_n} \ldots \sigma_n^{\mu_0}$ es otro.

Además de [7.1], pues, podremos escribir otra expresión

$$D_n = \sum_{(\mu)} \beta_{(\mu)}\, \sigma_0^{\mu_n}\, \sigma_1^{\mu_{n-1}} \ldots \sigma_n^{\mu_0} \qquad [7.4]$$

Demostraremos ahora que $\alpha_{(\mu)} = \beta_{(\mu)}$ o, en otros términos, el interesante

Teorema V: *D_n es una función auto-dual respecto a* $2\,(n-1)$.

Dem.: Sean $x_1', \ldots, x_n'$ nuevas variables, $\sigma_0', \sigma_1', \ldots, \sigma_n'$ sus funciones simétricas elementales. El discriminante D_n' podrá escribirse en la forma [7.4], con σ_ν' en lugar de σ_ν.

Ahora bien: si $x_\nu' = \dfrac{1}{x_\nu}$, se tiene:

$$\sigma_0' = 1 = \frac{\sigma_n}{\sigma_n}\,,$$

$$\sigma_1' = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\,,$$

$$\sigma_2' = \frac{1}{x_1\, x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}\, x_n} = \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_n}\,,$$

. . . .

$$\sigma_\nu' = \frac{1}{x_1\, x_2 \ldots x_\nu} + \ldots = \frac{\sigma_{n-\nu}}{\sigma_n}\,,$$

. . . .

$$\sigma_n' = \frac{1}{\sigma_n} = \frac{\sigma_0}{\sigma_n}\,,$$

y además:

$$D_n' = \prod_{i<j} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_j}\right)^2 = \prod_{i<j} \frac{1}{x_i^2\, x_j^2} \,.\, \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 = \frac{1}{\sigma_n^{\,2\,(n-1)}}\, D_n\,.$$

Reemplazando para D_n la expresión [7.1] y para D_n' la correspondiente a [7.4] resulta:

$$\sum_{(\mu)} \beta_{(\mu)} \sigma'^{\mu_n}_0 \sigma'^{\mu_{n-1}}_1 \ldots \sigma'^{\mu_0}_n = \sum_{(\mu)} \beta_{(\mu)} \frac{\sigma_n^{\mu_n} \sigma_{n-1}^{\mu_{n-1}} \ldots \sigma_0^{\mu_0}}{\sigma_n^{\mu_n + \mu_{n-1} + \ldots + \mu_0}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n^{2(n-1)}} \sum_{(\mu)} \alpha_{(\mu)} \sigma_0^{\mu_0} \ldots \sigma_n^{\mu_n}$$

que, a causa de [7.3] y del teorema fundamental de las funciones simétricas, da $\alpha_{(\mu)} = \beta_{(\mu)}$ c.q.d.

Por ejemplo: para $n = 4$, las [7.2], [7.3] son:

$$0 . \mu_0 + 1 . \mu_1 + 2 . \mu_2 + 3 \mu_3 + 4 \mu_4 = 12$$
$$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 6$$

y admiten las siguientes soluciones $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$:

(0, 0, 6, 0, 0); (0, 1, 4, 1, 0); (0, 2, 2, 2, 0); (1, 0, 3, 2, 0) y (0, 2, 3, 0, 1); (0, 3, 0, 3, 0); (1, 1, 1, 3, 0) y (0, 3, 1, 1, 1); (2, 0, 0, 4, 0) y (0, 4, 0, 0, 2); (1, 0, 4, 0, 1); (1, 1, 2, 1, 1); (1, 2, 0, 2, 1); (2, 0, 1, 2, 1) y (1, 2, 1, 0, 2); (2, 0, 2, 0, 2); (2, 1, 0, 1, 2); (3, 0, 0, 0, 3).

En consecuencia,

$$\begin{aligned} D_4 = {} & (6420) - 2\,(6411) - 2\,(6330) + 2\,(6321) - \\ & - 6\,(6222) - 2\,(5520) + 4\,(5511) + 2\,(5430) - \\ & - 2\,(5421) - 4\,(5331) + 4\,(5322) - 6\,(4440) + \\ & + 4\,(4431) + 4\,(4422) - 6\,(4332) + 24\,(3333) \end{aligned}$$

tendrá la forma:

$$\begin{aligned} D_4 = {} & a\,\sigma_2^6 + b\,\sigma_1\sigma_2^4\sigma_3 + c\,\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2 + d\,(\sigma_1^2\sigma_2^3\sigma_4 + \sigma_0\sigma_2^3\sigma_3^2) + \\ & + e\,\sigma_1^3\sigma_3^3 + f\,(\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3\sigma_4 + \sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3^3) + g\,(\sigma_1^4\sigma_4^2 + \sigma_0^2\sigma_3^4) + \\ & + h\,\sigma_0\sigma_2^4\sigma_4 + k\,\sigma_0\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3\sigma_4 + l\,\sigma_0\sigma_1^2\sigma_3^2\sigma_4 + m\,(\sigma_0\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4^2 + \\ & + \sigma_0^2\sigma_2\sigma_3^2\sigma_4) + n\,\sigma_0^2\sigma_2^2\sigma_4^2 + p\,\sigma_0^2\sigma_1\sigma_3\sigma_4^2 + q\,\sigma_0^3\sigma_4^3 . \end{aligned}$$

El cálculo detallado muestra que los coeficientes tienen los valores:

$a = b = 0$; $c = 1$; $d = -4$; $e = -4$;
$f = 18$; $g = -27$; $h = 16$; $k = -80$;
$l = -6$; $m = 144$; $n = -128$; $p = -192$;
$q = 256$.

8. **Las potencias de las σ_ν.** Expondremos, para finalizar, fórmulas que permiten calcular una potencia σ_ν^μ, cuestión que resulta muy útil en la práctica. Naturalmente, las fórmulas resultan algo complicadas, y por ello convendremos desde ahora en usar una notación especial. Si λ, α son dos enteros no negativos, la notación $\lambda[\alpha]\lambda$ significará $\lambda \ldots \lambda$ repetido α veces. Los [] reemplazan, pues, a los puntos suspensivos, pero indican explícitamente cuántas veces se halla repetido el índice λ. Por ejemplo, $(3\,[2]\,3,\ 2\,[4]\,2,\ 1,\ 0)$ indica la función simple (33222210) de 8 variables. La misma abreviatura se aplicará a las filas y columnas de una matriz.

Como $\sigma_\nu = (1\,[\nu]\,1, 0\,[n - \nu]\,0)$, es claro que σ_ν^2 contendrá términos de la forma $(2\,[\alpha_{22}]\,2,\ 1\,[\alpha_{21}]\,1,\ 0\,[\alpha_{20}]\,0)$ con diversos valores de las α_{2j}, y análogamente, σ_ν^3 contendrá sólo los términos $(3\,[\alpha_{33}]\,3, 2\,[\alpha_{32}]\,2,\ 1\,[\alpha_{31}]\,1,\ 0\,[\alpha_{30}]\,0)$; y en general, podremos escribir

$$\sigma_\nu^\mu = \sum_{(\alpha)} \Gamma_{\alpha,\mu}\,(\mu\,[\alpha_{\mu\mu}]\,\mu,\ \mu - 1\,[\alpha_{\mu\mu-1}]\,\mu - 1,\ \ldots,\ 1\,[\alpha_{\mu 1}]\,1, 0\,[\alpha_{\mu 0}]\,0) \qquad [8.1]$$

donde las $\alpha_{\mu j}$ podrán tomar valores desde 0 hasta un cierto número, compatibles con las condiciones que veremos más detalladamente. Por ejemplo, es obvio que hay un término con $\alpha_{\mu\mu} = \nu$, $\alpha_{\mu 0} = n - \nu$, restantes $\alpha_{\mu j} = 0$, es decir $(\mu\,[\nu]\,\mu,\ 0\,[n - \nu]\,0)$. En todos los casos, $\alpha_{\mu\mu} + \ldots + \alpha_{\mu 0} = n$. El problema consiste en calcular los coeficientes (enteros) $\Gamma_{\alpha,\mu}$. Lo haremos por recurrencia respecto a μ, ya que, obviamente, para $\mu = 1$ hay un solo $\Gamma_{\alpha,1}$, que corresponde a:

$$\alpha_{11} = \nu \quad , \quad \alpha_{10} = n - \nu \quad , \quad \Gamma_{\alpha,1} = 1 \qquad [8.3]$$

Multiplicando todos los términos de [8.1] por $\sigma_\nu = (1\,[\nu]\,1, 0\,[n - \nu]\,0)$ resulta:

$$\sigma_\nu^{\mu+1} = \sum_{(\alpha)} \Gamma_{\alpha,\mu} \left\| \begin{array}{l|l|l|c|l}
\mu+1\,[\alpha_{\mu\mu}]\,\mu+1 & \mu\quad [\alpha_{\mu,\mu-1}]\,\mu & \mu-1\,[\alpha_{\mu,\mu-2}]\,\mu-1 & & 1\,[\alpha_{\mu 0}]\,1 \\
[\nu] & [\nu] & [\nu] & \ldots & [\nu] \\
\mu+1\,[\alpha_{\mu\mu}]\,\mu+1 & \mu \qquad\qquad \mu & \mu-1 \qquad\quad \mu-1 & & 1 \qquad 1 \\
\hline
\mu\quad [\alpha_{\mu\mu}]\,\mu & \mu-1\,[\alpha_{\mu,\mu-1}]\,\mu-1 & \mu-2\,[\alpha_{\mu,\mu-2}]\,\mu-2 & & 0\,[\alpha_{\mu 0}]\,0 \\
[n-\nu] & [n-\nu] & [n-\nu] & \ldots & [n-\nu] \\
\mu \qquad\qquad \mu & \mu-1 \qquad\quad \mu-1 & \mu-2 \qquad\quad \mu-2 & & 0 \qquad 0
\end{array} \right\|$$

Al desarrollar esta matriz, aparecen términos del siguiente tipo: $(\mu + 1\,[\alpha_{\mu+1,\mu+1}]\,\mu + 1,\ \mu\,[\alpha_{\mu+1,\mu}]\,\mu,\ \ldots,\ 1\,[\alpha_{\mu+1,1}]\,1, 0\,[\alpha_{\mu+1,0}]\,0$ donde los $\alpha_{\mu+1,\mu+1}$ índices $\mu + 1$ se toman de las primeras filas y columnas, los $\alpha_{\mu+1,\mu}$ índices μ se toman, en parte, de las ν primeras

filas, en parte de las $n - \nu$ últimas, y lo mismo ocurre con los índices $\mu - 1, \ldots 1$, mientras que los $\alpha_{\mu+1,0}$ ceros se toman de las últimas filas y columnas. Podemos poner, pues,

$$\alpha_{\mu+1,j} = \alpha'_{\mu+1,j} + \alpha''_{\mu+1,j} \quad (j = 1, \ldots, \mu) \qquad [8.4]$$

donde $\alpha'_{\mu+1,j}$ indica el número de índices j tomados de las primeras ν filas, y $\alpha''_{\mu+1,j}$ el de los tomados entre las últimas $n - \nu$ filas. Como los índices j se separan así en dos grupos, inequivalentes, de. índices, esto introduce un coeficiente $\dfrac{\alpha_{\mu+1,j}\,!}{\alpha'_{\mu+1,j}\,!\,\alpha''_{\mu+1,j}\,!} = \dbinom{\alpha_{\mu+1,j}}{\alpha'_{\mu+1,j}}$ para cada $j = 1, \ldots, \mu$. A su vez, todo esto se refiere a una distribución fija de las $\alpha_{\mu j}$. Variando ésta pero de modo de obtener, siempre la misma distribución de las $\alpha_{\mu+1,j}$, se ve que resulta

$$\Gamma_{\alpha,\mu+1} = \sum_{(\alpha)} \prod_{\lambda=2}^{\mu+1} \prod_{k=1}^{\lambda-1} \binom{\alpha_{\lambda k}}{\alpha'_{\lambda k}} \qquad [8.5]$$

donde la $\sum\limits_{(\alpha)}$ debe entenderse referida a todas las posibles distribuciones de las $\alpha_{\lambda j}$ para los $\lambda \lesseqgtr \mu + 1$, que den lugar a la misma distribución de las $\alpha_{\mu+1,j}$.

Deben valer además las relaciones:

$$\alpha_{\mu+1,\mu+1} + \alpha''_{\mu+1,\mu} = \alpha_{\mu\mu}, \qquad [8,6]$$

$$\alpha'_{\mu+1,j+1} + \alpha''_{\mu+1,j} = \alpha_{\mu j} \quad (j = 1, \ldots, \mu - 1), \qquad [8.7]$$

$$\alpha'_{\mu+1,1} + \alpha_{\mu+1,0} = \alpha_{\mu 0}, \qquad [8.8]$$

que expresan todas el número de columnas de donde se toman los índices de la matriz; y además la siguiente, que expresa el peso del término $(\mu + 1\,[\alpha_{\mu+1,\mu+1}]\,\mu + 1, \mu\,[\alpha_{\mu+1,\mu}]\,\mu, \ldots, 0\,[\alpha_{\mu+1,\mu}]\,0)$:

$$(\mu + 1)\,\alpha_{\mu+1,\mu+1} + \sum_{j=1}^{\mu} j\,\alpha'_{\mu+1,j} + \sum_{j=1}^{\mu} j\,\alpha''_{\mu+1,j} = (\mu + 1)\,\nu \qquad [8.9]$$

(La ulterior relación

$$\alpha_{\mu+1,\nu+1} + \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{\mu+1,j} + \alpha_{\mu+1,0} = n$$

que expresa el número total de índices, se verá que es consecuencia de las otras relaciones ya escritas.)

De [8.6] resulta:

$$\alpha''_{\mu+1,\mu} = \alpha_{\mu\mu} - \alpha_{\mu+1,\mu+1}\,. \qquad [8.10]$$

De [8.7], a causa de [8.4] para el índice μ en lugar de $\mu + 1$:

$$\alpha''_{\mu+1,j} = \alpha_{\mu,j} - \alpha'_{\mu+1,j+1} = \alpha''_{\mu j} + \alpha'_{\mu j} - \alpha'_{\mu+1,j+1}.$$

Esta puede escribirse en la forma:

$$\alpha''_{\lambda+1,j} = \alpha''_{\lambda j} + \alpha'_{\lambda j} - \alpha'_{\lambda+1,j+1} \text{ para } \lambda = j+1,\ j+2, \ldots$$

(considerando j fijo, $= 1, 2, \ldots, \mu - 1$). Sumando desde $\lambda = j + 1$ hasta $\lambda = \mu$:

$$\sum_{\lambda=j+1}^{\mu} \alpha''_{\lambda+1,j} = \alpha_{jj} - \alpha_{j+1,j+1} + \sum_{\lambda=j+2}^{\mu} \alpha''_{\lambda j} + \sum_{\lambda=j+1}^{\mu} \alpha'_{\lambda j} - \sum_{\lambda=j+2}^{\mu+1} \alpha_{\lambda,j+1},$$

habiendo tenido en cuenta [8.10]. De aquí resulta:

$$\alpha''_{\mu+1,j} = \alpha_{jj} - \alpha_{j+1,j+1} + \sum_{\lambda=j+1}^{\mu} \alpha'_{\lambda j} - \sum_{\lambda=j+2}^{\mu+1} \alpha'_{\lambda,j+1} \quad (j = 1, \ldots, \mu). \qquad [8.11]^*$$

Esta fórmula era válida para $j = 1, \ldots, \mu - 1$; pero el valor $j = \mu$ que corresponde a [8.10] puede incluirse, pues las sumatorias son entonces vacías. Para $j = 1$ debe considerarse $\alpha_{11} = \nu$ según [8.3], pero para este caso veremos otra fórmula (la [8.13]).

Reemplazando en [8.9] la [8.10] y la $\alpha''_{\mu+1,j}$ que se obtiene de [8.7]:

$$(\mu + 1)\, \alpha_{\mu+1,\mu+1} + \sum_{j=1}^{\mu} j\alpha'_{\mu+1,j} + \sum_{j=1}^{\mu-1} j\,(\alpha_{\mu j} - \alpha'_{\mu+1,j+1}) +$$
$$+ \mu\,(\alpha_{\mu\mu} - \alpha_{\mu+1,\mu+1}) = (\mu + 1)\,\nu,$$

y como $\sum_{\mu=1}^{\mu} j\alpha_{\mu j} = \mu\nu$, por [8.9] para el índice μ, queda:

$$\alpha_{\mu+1,\mu+1} + \sum_{j=1}^{\mu} j\alpha'_{\mu+1,j} - \sum_{j=1}^{\mu-1} j\alpha'_{\mu+1,j+1} = \nu,$$

de donde:

$$\alpha'_{\mu+1,1} = \nu - \alpha_{\mu+1,\mu+1} - \sum_{j=2}^{\mu} \alpha'_{\mu+1,j}. \qquad [8.12]^*$$

Aplicando esta fórmula al caso $j = 1$ de [8.11] resulta:

$$\alpha''_{\mu+1,1} = \mu\nu - \alpha_{22} - \sum_{\lambda=2}^{\mu} \alpha_{\lambda\lambda} - \sum_{\lambda=2}^{\mu} \sum_{k=2}^{\lambda-1} \alpha'_{\lambda k} - \sum_{\lambda=3}^{\mu+1} \alpha'_{\lambda 2}. \qquad [8.13]^*$$

Finalmente, si admitimos que

$$\alpha_{\mu 0} = n - \mu\nu + \sum_{j=2}^{\mu} \alpha_{jj} + \sum_{2 \leq j < \lambda \leq \mu} \alpha'_{\lambda j} \qquad [8.14]^*$$

(que es cierta para $\mu = 1$ y $\mu = 2$), de [8.8] resulta, teniendo en cuenta [8.12],

$$\alpha_{\mu+1,0} = \alpha_{\mu 0} - \alpha'_{\mu+1,1} = n - \mu\nu + \sum_{j=2}^{\mu} \alpha_{jj} + \sum_{2 \leq j < \lambda \leq \mu} \alpha'_{\lambda j} -$$

$$- \nu + \alpha_{\mu+1,\mu+1} + \sum_{j=2}^{\mu} \alpha'_{\mu+1,j} = n - (\mu+1)\nu + \sum_{j=2}^{\mu+1} \alpha_{jj} + \sum_{2 \leq j < \lambda \leq \mu+1} \alpha'_{\lambda j},$$

quedando así probada [8.14] por inducción.

En suma, se tienen las cuatro fórmulas marcadas con asteriscos, que expresan en función de los parámetros α_{jj}, $\alpha'_{\lambda j}$ las restantes α. Las escribimos nuevamente, en forma adecuada:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{\mu+1,0} &= n - (\mu+1)\nu + \sum_{j=2}^{\mu+1} \alpha_{jj} + \sum_{2 \leq j < \lambda \leq \mu+1} \alpha'_{\lambda j} \\
\alpha''_{\mu+1,1} &= \mu\nu - \alpha_{22} - \sum_{\lambda=2}^{\mu} \alpha_{\lambda\lambda} - \sum_{\lambda=3}^{\mu+1} \alpha'_{\lambda 2} - \sum_{2 \leq j < \lambda \leq \mu} \alpha'_{\lambda j} \\
\alpha'_{\mu+1,1} &= \nu - \alpha_{\mu+1,\mu+1} - \sum_{j=2}^{\mu} \alpha'_{\mu+1,j} \\
\alpha''_{\mu+1,j} &= \alpha_{jj} - \alpha_{j+1,j+1} + \sum_{\lambda=j+1}^{\mu} \alpha'_{\lambda j} - \sum_{\lambda=j+2}^{\mu+1} \alpha'_{\lambda,j+1} \quad (j = 2, \ldots, \mu)
\end{aligned}\right\} \qquad [8.15]$$

Formando la suma $\sum_{j=0}^{\mu+1} \alpha_{\mu+1,j}$ se obtiene n, como era de esperar.

9. **Ejemplo:** Sea $n = 5$, $\nu = 2$ y se trate de calcular σ_2^3. Conviene escribir las [8.15] para $\mu = 2$ y $\mu = 1$:

$$\alpha_{30} = -1 + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha'_{32} \qquad [9.1]$$

$$\alpha''_{31} = 4 - 2\,\alpha_{22} - \alpha'_{32} \qquad [9.2]$$

$$\alpha'_{31} = 2 - \alpha_{33} - \alpha'_{32} \qquad [9.3]$$

$$\alpha''_{32} = \alpha_{22} - \alpha_{33} \qquad [9.4]$$

$$\alpha_{20} = 1 + \alpha_{22} \qquad [9.5]$$

$$\alpha''_{21} = 2 - \alpha_{22} \qquad [9.6]$$

$$\alpha'_{21} = 2 - \alpha_{22} \qquad [9.7]$$

El desarrollo contendrá términos en (33000), (32100), (31110), (22200), (22110) y (21111). Para cada uno se calculará el coeficiente $\Gamma_{\alpha,3}$ por [8.5]. Por ejemplo: para (33000) se tiene

$$\alpha_{33} = 2 \quad , \quad \alpha_{32} = \alpha_{31} = 0 \quad , \quad \alpha_{30} = 3$$

Luego $\alpha'_{31} = \alpha''_{31} = \alpha'_{32} = \alpha''_{32} = 0$, [9.4] da $\alpha_{22} = \alpha_{33} = 2$ y [9.6], [9.7] $\alpha'_{21} = \alpha''_{21} = 0$. Hay una sola distribución que da el término (33000), con coeficiente:

$$\binom{\alpha_{21}}{\alpha'_{21}} \binom{\alpha_{31}}{\alpha'_{31}} \binom{\alpha_{32}}{\alpha'_{32}} = 1 \, .$$

Análogamente se hallan los demás coeficientes. Discutamos, por ejemplo, el de (22110). Aquí es

$$\alpha_{33} = 0 \quad , \quad \alpha_{32} = 2 = \alpha_{31} \quad , \quad \alpha_{30} = 0 \, .$$

Como $\alpha'_{31} + \alpha'_{32} = 2$ por [9.3], sólo son posibles tres casos:

$\alpha'_{31} = 0, \ \alpha'_{32} = 2$; luego $\alpha''_{31} = 2, \ \alpha''_{32} = 0, \ \alpha_{22} = 0, \ \alpha'_{21} = \alpha''_{21} = 2$;
$\alpha'_{31} = 1 = \alpha'_{32}$; luego $\alpha''_{31} = 1 = \alpha''_{32}, \ \alpha_{22} = 1, \ \alpha'_{21} = \alpha''_{21} = 1$;
$\alpha'_{31} = 2, \ \alpha'_{32} = 0$; luego $\alpha''_{31} = 0, \ \alpha''_{32} = 2, \ \alpha_{22} = 2, \ \alpha'_{21} = \alpha''_{21} = 0$

Los coeficientes respectivos, $\binom{\alpha_{21}}{\alpha'_{21}} \binom{\alpha_{31}}{\alpha'_{31}} \binom{\alpha_{32}}{\alpha'_{32}}$ son en los tres casos:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{0} \cdot \binom{2}{0} = 6$$

$$\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} = 8$$

$$\binom{0}{0} \cdot \binom{2}{0} \cdot \binom{2}{0} = 1$$

y el total, 15.

Por el mismo proceso se hallan los demás. Resultado:

$$\sigma_2^3 = (33000) + 3\,(32100) + 6\,(31110) + 6\,(22200) + \\ + 15\,(22110) + 36\,(21111) \, .$$

Mayo de 1948.

LA PLATA,
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

LAS FORMACIONES GEOLOGICAS Y LAS LLUVIAS

POR

GUILLERMO HOXMARK

Ex Jefe de Pronósticos, de Estadística Pluviométrica y de Biblioteca del Servicio Meteorológico Nacional

---

SUMMARY. — A glance at a rainfall map of the World will convence us that the distribution of the average precipitation is somewhat uneven. In South America we have several regions where it is possible to observe this phenomenon. The river Paraná-Paraguay basin constitute one of them. The catchment area contains different geological formations and the average rainfall frequency shows a decided inclination to be influenced by the age of the rocks. The yearly rainfall, Fig. 1, over the part of the basin laying to the east of the river Paraguay is rather heavy, mostly over 1500 milimetres (60 inch). On the west side we find a gradual diminishing down to less than 750 mm (30 inch.).

The geological structure of the basin is shown in Fig. 2. It is evident that most of the rains fall on the triassic rocks, east of the river, and the lesser amount on the quarternary formations which extends down south through the Pampas where rain is relatively scarce.

In Africa and in Arabia we find the same correlation. Deficient rain going together with recent geological formations.

The centre of the island of Cyprus, situated in the inner part of the Mediterranean, has a belt of pleistocene and other recent rocks, the rainfall being rather scarce, between two mountain chains consisting of older rocks with a much greater annual rainfall.

In England we find that the precipitation over old paleozoic rocks in Wales and Cornwall is heavy, up to 2000 milimetres (80 inch.) in the former and 1500 milimetres (60 inch.) in the later, and that the same correlation exist farther north.

In south, central and east England with a geological structure consisting mostly of formations of pliocene, eocene, oligocene, etc., all of them recent rocks, the annual rainfall is very much inferior.

What is the origen of the correlations between the age of the geological stratas and the average rainfall?

It could be that the penetrating «gamma» rays discovered in rocks by Dr. Victor Hess, Nobel prize winner of cosmic rays fame is related in some unknown way with the higher rainfall observed over the old geological formations of the Earth.

But there are other factors also, which may affect correlations. The maxima zones of rainfall changes their place from time to time on the Earth. That there also exist place changes of magnetism in different geological structures has been shown by various researchers.

Dr. E. C. Bullard has described (Monthly Not. Royal Astronomical Soc. Geophysical Supp. 5, Nº 7, Julio 1948) the rapid changes of the earth's

magnetic field in South Africa. He suggest that the radioactive generation of heat might produce thermal convective currents.

« Bartels has found that the secular variation is regional in character, differing from the main geomagnetic field itself, which is planetary. The secular variations studies made by Fish and Fleming and later by Vestine and collaborators, at the Department of Terrestrial Magnetism of the Carnegie Institution of Washington, shows that at any one epoch, the secular variation is most active in certain limited regions, but that such activity may die away in the course of a few decades, new centres of activity appearing elsewhere ». That is exactly what is happening with the maxima zones of rainfall found by Messman and the author.

That the magnetic influence of solar activity on the Earth is strong, we have ample proof of during the appearance of great sunspots groups which cause geomagnetic storms.

But we may presume that the planet is receiving daily and intermittent magnetic impulses, which have an accumulative effect.

The magnetic receptivity or charging capacity of the geological formations may depend on their age and their consistency. Probably, when a formation has reached its maxima magnetic charge, or saturation point, it is unloaded on other negative formations, hence the changes of magnetic activity during a few decades or less.

« These characteristics are substantiated by the ocasional, rather rapid changes of rate and direction of the secular variation at magnetic Observatories, where the magnetic field is most accurately determined ».

La distribución de las precipitaciones pluviales sobre el globo terráqueo es algo irregular. Una mirada a los mapas de lluvias normales del mundo nos convencerá de lo dicho.

En la América del Sur poseemos varias zonas donde se puede observar el fenómeno. La cuenca alimentadora del río Paraná abarca varias formaciones geológicas y también muestra muchas diferencias en lo que respecta a la frecuencia de las lluvias.

Las precipitaciones medias anuales (Fig. 1) que corresponden a la cuenca imbrífera [1] son más abundantes al este del río Paraguay, siendo en su mayor parte superiores a los 1.500 milímetros. En el lado occidental de este río hallamos una disminución gradual en la intensidad pluvial, la que no alcanzará la mitad de aquella cantidad en la faja de menor precipitación.

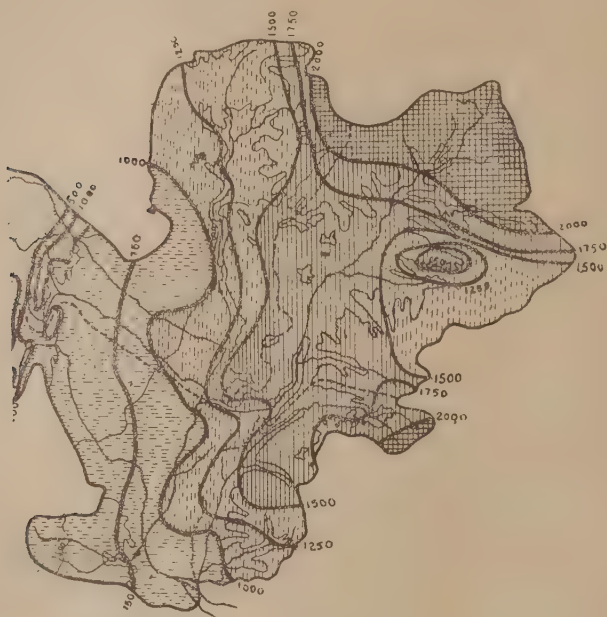
El mapa, Fig. 2, muestra las formaciones geológicas superficiales, de la cuenca colectora. Vemos que a la formación triásica corresponden las mayores descargas pluviales del año y a las formaciones cuaternarias las menores.

Estas se extienden por el sur hasta la Patagonia y en las regiones

[1] Armani, A. « Las rutas comerciales y el río Paraná-Paraguay. P. 12 ». B. Aires, 1947.

de esta estructura geológica encontramos siempre una relativa insuficiencia de lluvias, y hasta condiciones casi desérticas.

Al otro lado del Atlántico Sur encontramos condiciones de clima interesantes en Africa. Las regiones de este continente que acusan deficiencias pluviométricas, de modo general, corresponden a las



LLUVIAS ANUALES

(en milímetros)

Cuenca imbrífera del Río Paraná (Armani)

Fig. 1.

arenas del desierto, los terrenos aluviales y diluviales y de las formaciones terciarias, es decir rocas relativamente jóvenes dentro de la evolución geológica del planeta.

En la Arabia que sufre de escasez de lluvias se afloran siempre capas cretáceas y sedimentos de formación más reciente.

Se calcula que la cuarternaria, en la que estamos, ha tenido una duración de cerca dos millones de años y que la terciaria, que la

precedió, aproximadamente unos cincuenta y ocho millones de años. La cretácea anterior a la terciaria debe haber durado cincuenta o sesenta millones de años.

En el interior del mar Mediterráneo se halla la isla de Chipre, de 9.282 km², situada cerca de la costa de Siria.



FORMACION GEOLOGICA SUPERFICIAL

Cuenca imbrífera del Río Paraná (Armani)

Fig. 2.

Entre dos cadenas de montañas hay una llanura bastante grande. La parte meridional elevada, consiste en diabasa ignea, dentro de formaciones miócenas y eócenas.

El norte de la isla, que en esta parte está muy alargada, pertenece a la miocénica, cretácea y triásica.

Entre aquellos dos macizos hallamos en lo bajo rocas más recientes, pertenecientes a la formación miocénica superior, incluyendo la pleistocénica, o sea, formaciones que son las más jóvenes en la historia geológica del mundo (Fig. 3). La lluvia anual (²) normal en la zona baja de la isla es inferior a 380 milímetros. Sobre el macizo norte caen anualmente hasta 635 mm. y el macizo del sur

(²) Paver, G. L. — « Water Supply in the Middle East Campaigns-Cyprus ». Water and Water Engineering, London. v. 50, n. 615, p. 247-256, 1947.

recibe un término medio de más de 635 mm, en la zona más lluviosa.

En Inglaterra vemos que hay una relación (Fig. 4) entre la frecuencia normal de las precipitaciones y la edad de las formaciones geológicas.

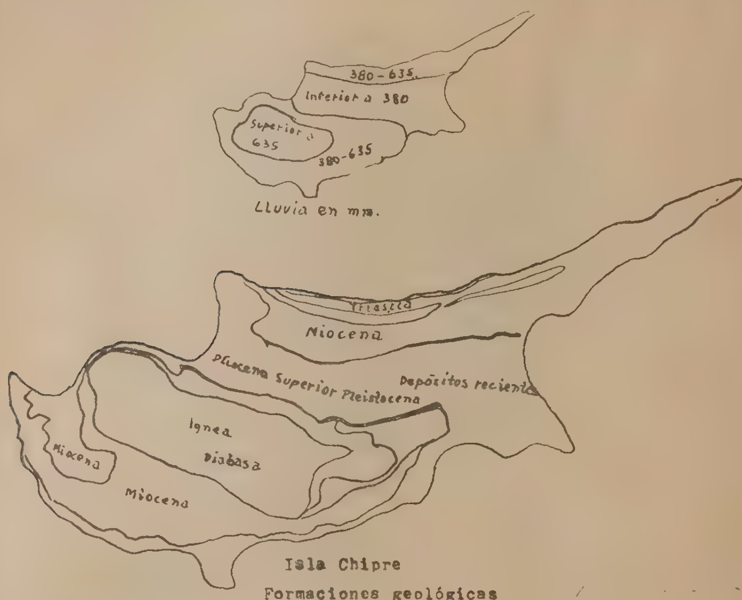


Fig. 3.

Las lluvias anuales son abundantes, alcanzando hasta los 2000 milímetros sobre las regiones de Gales y de Cornualles, formadas por rocas antiguas de la Era paleozoica, inferior y superior respectivamente. Estas rocas continúan hacia el norte de la isla acompañadas siempre por adecuadas precipitaciones pluviales.

Enncontramos las zonas menos lluviosas del país en el sud, centro y este, donde hay formaciones geológicas como pliocénicas, oligocénicas y eocénicas, cretáceas superior e inferior, jurásicas y liásicas todas recientes, o de otras formaciones pertenecientes a las Eras mesozoica y cenozoica (ver mapa).

Nos limitamos a los pocos ejemplos descriptos en lo precedente, los que parecen demostrar ciertas relaciones entre la edad de las

rocas y el régimen lluvioso. En lo que respecta a la causa, o causas, de aquella correlación es difícil afirmar algo concreto; no obstante, quizá los resultados de algunas investigaciones efectuadas por el doctor Víctor F. Hess, ganador del premio Nobel de física en 1936

Fig. 1

por sus descubrimientos en relación con los rayos cósmicos, pueden facilitarnos una llave.

Hess comunicó, como se recordará, en noviembre de 1947, que los experimentos hechos por él y colaboradores en una cámara subterránea en la Universidad de Fordham, había revelado la existencia de una nueva radiación misteriosa, desconocida hasta este momen-

to, que procede de la mayor parte de las rocas del globo terráqueo.

Para los experimentos utilizaron una roca de granito. Esta piedra contenía algo de uranio, de torio y de potasio que emiten radia diaciones naturales. Se descubrió que la roca despedía un excedente de rayos, que, según Hess, era una radiación más penetrante que todas las radiaciones conocidas.

El investigador declaró que era una radiación de rayos « gama » que forma parte de las irradiaciones producidas por la bomba atómica al estallar.

¿Cuál es el origen de aquellos rayos? ¿Tendrán alguna influencia sobre los átomos que componen la atmósfera, hallándose encima de las zonas donde imperan las rocas que despiden radiaciones ultrapenetrantes?

¿Es un producto de la radiación cósmica que se ha acumulado en las rocas o es una radiación conservada en ellas desde su creación primitiva?

En « Nature », Londres, apareció, en marzo de 1948, un artículo que trataba del campo geomagnético principal y los cambios en el magnetismo en distintas formaciones geológicas (3).

En el artículo se decía que Bartels ha demostrado que las variaciones seculares son regionales en carácter, y que son diferentes del campo magnético principal, que es planetario.

« Los estudios de la variación secular efectuados por Fleming y Fish, y hace poco por Vestine y sus colaboradores, en el « Department of Terrestrial Magnetism of the Carnegie Institution of Washington », muestran que en cualquier época individual, *la variación secular es más activa en ciertas regiones limitadas*, pero que una actividad de esta clase, *puede desaparecer en el curso de unas pocas décadas*, y que nuevos centros de actividad aparecerán en otras partes.

Estas características son confirmadas por los cambios ocasionales bastantes rápidos, de la intensidad y la dirección de la variación secular, en los observatorios magnéticos, donde se determina el campo magnético con más exactitud.

Los períodos de cambios de unos pocos siglos de duración, y todavía más, la variación observada durante una cantidad reducida

(3) « Nature ». London, Nº 4091, V. 161, marzo 17, 1948, p. 462/464.

de décadas, son muy rápidos para un fenómeno que sin duda es originado dentro del cuerpo de la tierra ».

Es un hecho comprobado, y probablemente se halla relacionado con los movimientos magnéticos, que los regímenes pluviométricos experimentan cambios en algunas décadas (4), es decir que las máximas de las precipitaciones se desplazan, independientemente de los períodos solares de 11 ½ a 23 años.

Durante 40 años desde, desde 1861 hasta 1900, hubo una pronunciada máxima en la frecuencia de lluvia en el mes de marzo en Buenos Aires, pero posteriormente la máxima se mudó al mes siguiente, abril. En Córdoba ocurrió la máxima de las lluvias en el mes de dicembre antes del año 1900 y después en diciembre y febrero, o sea dos veces.

Este fenómeno no se limita a nuestro país, porque Mossman (5) ha demostrado desplazamientos en la intensidad de las precipitaciones en otros puntos del hemisferio sur. La Ciudad del Cabo, Sud Africa, es un buen ejemplo. De 1861 a 1870 la máxima ocurrió en junio; de 1871 a 1880, y de 1881 a 1890 ésta se había desplazado al mes de mayo. De 1891 a 1900 hubo la máxima en julio y de 1901 a 1910 en junio.

También en Australia han tenido lugar estos fenómenos. Tomamos como un ejemplo Brisbane, de Queensland, donde la máxima fué fijada en los meses de marzo, febrero, enero, enero y marzo, respectivamente en los períodos de 1861 a 1870, 1871 a 1880, 1881 a 1890, 1891 a 1900 y de 1901 a 1910.

El desplazamiento periódico de las máximas de las lluvias normales en diferentes décadas, puede tener relación con las variaciones magnéticas, ya que, según Fleming, Fish y Vestine, « una actividad magnética puede desaparecer en el curso de unas pocas décadas y que nuevos centros de actividad aparecerán en otras partes ».

Es probable que las variaciones magnéticas tienen su origen en las radiaciones solares que son variables en tiempo y en intensidad. La aparición de grandes manchas solares producen, generalmente, fuertes temporales magnéticos en la Tierra.

(4) HOXMARK, G. — « Régimen Pluviométrico de la República Argentina ». Tomo CX, p. 81/109. *Anales Sociedad Científica Arg.*, 1930.

(5) MOSSMAN, R. C. — « Southern Hemisphere Decadal and Mean Monthly and Annual Rainfall », en *Quarterly Journal Royal Meteorological Society*, n. 192, p. 355/366. Octubre 1919. London.

Sugerimos (6) que el campo magnético principal terrestre es cargado por los impulsos procedentes del astro, y que la proporción de las acumulaciones de corrientes magnéticas en las distintas zonas del mundo, varían según la receptividad de las formaciones geológicas.

(6) HOXMARK, G. — « El Sol y la Tierra ». *Anal. Soc. Cient. Arg.* T. CVI, Buenos Aires, 1926.

« El tiempo y el magnetismo ». *La Nación,* Junio 20, 1943. Bs. Aires.

« Las Radiaciones Solares y Cósmicas y sus Reflejos en el Globo Terráqueo ». *Anal. Soc. Cient. Arg.* T. CXLII, julio 1946, Bs. Aires.

SECCION CONFERENCIAS

SOBRE LA PRODUCCION ARTIFICIAL DE MESONES

POR

GUIDO BECK
Observatorio Astronómico, Córdoba

Conferencia pronunciada en la Sociedad Científica Argentina el 3 de Septiembre de 1948.

Señoras y señores:

Quiero, primero, agradecer la amable invitación y decirles que considero un privilegio el poderme dirigir a ustedes.

El tema sobre el cual tengo que hablar implica, como todo tema semejante, dos preguntas:

¿Cómo se hace?
¿Qué significa?

Ya que soy teórico, me permitiré invertir el orden, tratando contestar primero el ¿qué significa?

Ustedes saben que, cuando se empezó a estudiar lo que llamamos la estructura de la materia, se consideró, primero, como es natural, el caso más simple, el de un gas. Ustedes saben que las propiedades de un gas se describen satisfactoriamente por la imagen de un enjambre de puntos materiales en agitación térmica dentro de un recipiente (Fig. 1 *a*). Los puntitos, los cuales se consideran un poco más tarde como esferitas rígidas de tamaño pequeño pero finito, se llaman *moléculas*.

La imagen de moléculas puntiformes o esféricas es insuficiente. La química nos enseña que una molécula es un sistema complejo, constituído, según el material, por varios *átomos* (Fig. 1 *b*). Una molécula, en la cual representamos a los átomos por puntitos o por pequeñas esferas, ya es un sistema complicado y se estudian todavía hoy en día las fuerzas que actúan entre los átomos, sus movimientos relativos, vibraciones, rotaciones, etc.

Desde principios de siglo sabemos que los puntitos o esferitas que representan, en fig. 1 *b* los átomos, también son sistemas complejos. Un átomo consiste en un *núcleo* puntiforme que reúne la mayor

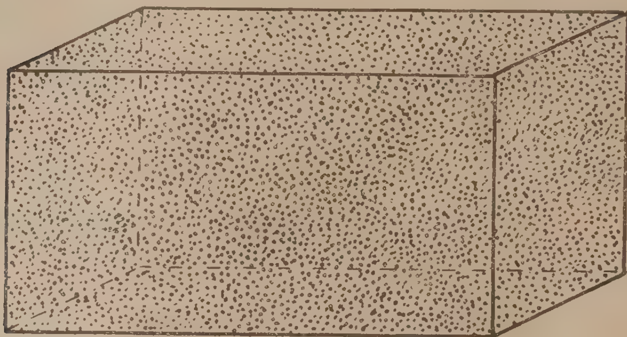


Fig. 1 *a*). — Gas.

parte de la masa y tiene carga eléctrica positiva, rodeado por una nube de *electrones* (fig. 1 *c*). Se necesitó un cuarto de siglo para orientarse sobre la estructura de la nube electrónica del átomo. Después, el interés se concentró sobre el « puntito » en el centro.

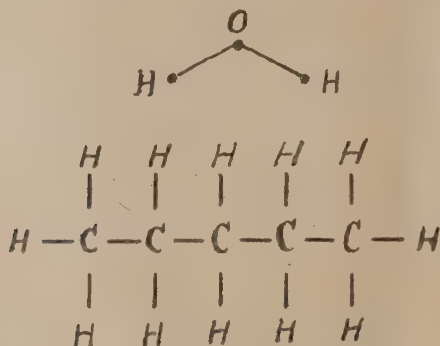


Fig. 1 *b*). — Moléculas. (10^{-6} cm)

El núcleo tampoco es un puntito, sino un sistema complejo, bastante complicado, compuesto por *nucleones* (protones y neutrones). Todavía no podemos describir un núcleo con precisión satisfacto-

ría, pero ya sabemos que se comporta, en general, como una gota líquida de gran densidad (fig. 1 *d*). Las esferitas, en la figura, representan, ahora, a los nucleones.

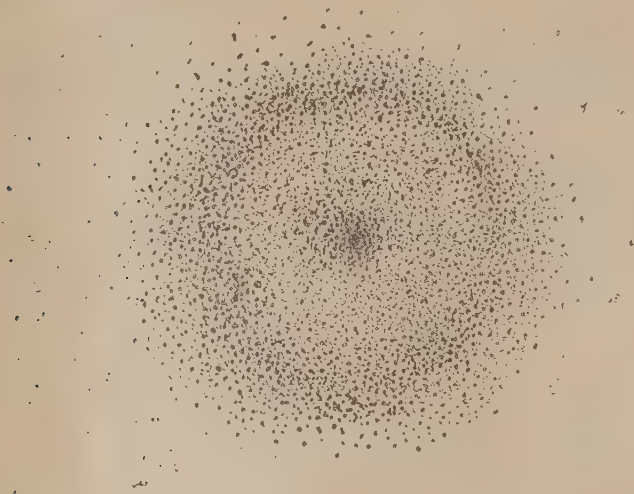


FIG. 1 *c*). — Atomo. (10^{-8} cm)

Después viene el último paso que se ha dado hasta ahora: la estructura del nucleón. A ella se refiere el problema sobre el cual tengo que hablar hoy.

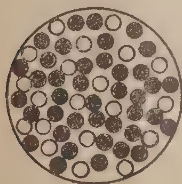


FIG. 1 *d*). — Núcleo. (10^{-12} cm)

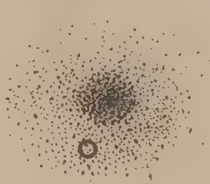


FIG. 1 *e*). — Nucleón. ($1{,}6.10^{-13}$ cm)

Hay dos clases de nucleones. Una de ellas, los protones (núcleos de hidrógeno) tienen carga positiva. Son conocidos desde mucho tiempo. La otra, los neutrones, los identificó en 1933 J. CHADWICK en Cambridge. Doce años después ya tuvieron aplicación industrial y militar, en la bomba atómica.

En esta ocasión la idea básica sobre la estructura de los nucleones, la que veremos fué muy fructífera, vino, en 1935, de Osaka, del Japón. El razonamiento de H. YUKAWA fué el siguiente:

Ya se sabía, que las fuerzas electromagnéticas, $F = e^2/r^2$, a distancias nucleares, $r = 10^{-13}$ cm, eran insuficientes para mantener unido un conjundo de nucleones. Hacían falta fuerzas alrededor de 25 veces más intensas. Dado que hasta entonces, todos los otros fenómenos conocidos se podían reducir a sólo dos clases de fuerzas, electromagnéticas y gravitatorias, ese hecho de por sí ya fué una cosa seria.

Las fuerzas nuevas, desconocidas, debían ser 25 veces más intensas en dimensiones nucleares, pero insensibles fuera de estas dimensiones. YUKAWA puso para asegurar las propiedades necesarias, para la función del potencial

$$\Phi = f^2 \cdot \frac{e^{-\kappa r}}{r} \quad \text{en lugar de} \quad \varphi = e^2 \cdot \frac{1}{r}$$

con $f \gtrsim 5 \cdot e$; $1/\kappa \gtrsim 10^{-13}$ cm, y, después, desarrolló un poco más la analogía entre fuerzas nucleares y electromagnéticas

El potencial eléctrico φ satisface a la siguiente relación

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Esta relación dice que el campo eléctrico se propaga con la velocidad de la luz y que, si hacemos vibrar una carga eléctrica, salen ondas electromagnéticas que corresponden a la emisión de *fotones* de energía $h\nu$.

El potencial de YUKAWA satisface a una ecuación un poco más complicada,

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \kappa^2 \Phi = 0$$

ecuación estudiada anteriormente por KLEIN y GORDON para describir, según la mecánica ondulatoria, el movimiento de partículas con velocidades

$$v \leq c$$

y con masa finita μ,

$$\kappa = \frac{2 \pi \mu c}{h} \cdot \qquad [1]$$

Introduciendo en [1] el valor $\varkappa = 10^{13}$ cm^{-1}, se obtiene para la masa

$$\mu \sim 200 \, . \, m_e$$

(m_e = masa del electrón).

YUKAWA concluyó que, si a las fuerzas electromagnéticas les corresponden fotones (radiación electromagnética), de masa cero, a las fuerzas nucleares les deben corresponder partículas (radiación nuclear) de masa finita.

Desde el punto de vista de la energía, los fotones son muy baratos. Basta hacer oscilar un poco una carga para obtenerlos. Salen de todas partes p. ej. de cada lámpara. Las nuevas partículas, de energía mínima μc^2, son mucho más costosas. Para conseguirlas, hay que hacer vibrar una partícula nuclear con una energía de por lo menos 100 MeV. En 1935, C.D. ANDERSON las encontró en la radiación cósmica, como partículas ionizantes, con cargas eléctricas positivas y negativas.

B. ROSSI mostró que las nuevas partículas, los *mesones*, son inestables, tienen una vida media de 10^{-6} sec. Tenemos, pues que suponer que los mesones se forman, en la alta atmósfera por procesos nucleares. Al nivel del mar hay relativamente pocos, con la altura su número crece.

Se puede estudiar la interacción de mesones con núcleos. Cuanto más sabemos de los mesones, tanto más indicaciones tenemos sobre las fuerzas nucleares. No puedo, aquí, referirme a los muchos trabajos que ya se han hecho al respecto. Pero quiero mencionar un punto importante.

Un neutrón es eléctricamente neutro, tiene carga cero. Pero, por eso, no deja de ser influenciable por un campo electromagnético. F. BLOCH mostró que podemos influir sobre los neutrones haciéndolos pasar por placas de hierro magnetizado. El neutrón se comporta como un pequeño imán, cuyo momento BLOCH logró medir con considerable precisión. Luego: el neutrón es neutro en total, pero contiene corrientes eléctricas que dan origen al momento magnético. Midiendo el momento magnético del protón (O. STERN, I. I. RABI) se llega a una conclusión parecida. El protón, también, debe, además de su carga eléctrica, estar dotado de corrientes eléctricas responsables de su momento magnético. Llegamos, pues, a la imagen de la fig. 1 *c*: el nucleón rodeado de un campo cargado,

con corrientes internas, campo que simultáneamente determina las fuerzas nucleares y del cual, si es suficiente la energía se liberan los mesones. El pequeño círculo, en la fig. 1 *e* indica, esquemáticamente, la región espacial, en la cual están localizados los procesos de los cuales hablaremos a continuación.

Eso debe ser suficiente, para darles una idea de lo que significan los mesones. Queda, sin embargo, la otra cuestión: ¿Cómo se hace?

Para hacer experiencias con mesones, hacen falta dos dispositivos: uno para producirlos, otro para registrarlos. Si tomamos los mesones presentes en la radiación cósmica que nos llega continuamente y gratis, no necesitamos sino el último dispositivo.

Al principio se usaron, para registrar, los métodos conocidos: La cámara de Wilson y los contadores de Geiger-Müller.

La cámara de Wilson, una cámara con vapor de agua sobresaturado, al expanderse condensa gotitas de agua a lo largo de las trayectorias de partículas cargadas que la atraviesan y permite así ver o fotografiar tales trayectorias. El contador de Geiger-Müller es un dispositivo (en general un hilo metálico en el eje de un cilindro conductor) cargado e inestable, que, al pasar una partícula ionizante, se descarga y permite, así, registrar el número de impulsos que llegan.

El tercer método, el que dió los últimos resultados, es el método fotográfico. Los primeros intentos para registrar partículas ionizantes en una placa fotográfica han sido hechos en 1910, pero solamente en 1932 este método ha dado resultados importantes relativos a los rayos cósmicos. MARIETTA BLAU en Viena había trabajado con placas desde 1925. En 1932 ella y H. WAMBACHER expusieron placas durante seis meses a 2500 m de altura, en el Hafelkar, cerca de Innsbruck. Revelando, después, las placas, encontraron en la emulsión « estrellas » del tipo de las representadas en las figuras 2 y 7, testigos de « explosiones nucleares » o, como decimos ahora: evaporaciones de gotas nucleares fuertemente calentadas o excitadas por un choque con una partícula cósmica. En Inglaterra, C. F. POWELL, en Bristol, adoptó el método fotográfico. El y otros lo desarrollaron considerablemente, desde 1939. Hallaron emulsiones fotográficas particularmente apropiadas, de grano muy fino y de distinta sensibilidad. Emulsiones menos sensibles para partículas pesadas (fuertemente ionizantes), emulsiones más sensibles para mesones. Se

buscan, todavía, placas apropiadas para registrar electrones. Hizo falta mucho trabajo para estudiar el comportamiento de una partícula cargada en una emulsión fotográfica. También hizo falta controlar la homogeneidad de las emulsiones, verificar la relación entre energía y alcance (range) de una partícula, determinar la densidad de ionización en una trayectoria, etc. Hizo falta establecer los métodos para medir, con el microscopio, las trayectorias de un largo que, solamente en casos excepcionales alcanza medio milímetro.



FIG. 2. — « Estrella » = desintegración de un núcleo por rayos cósmicos. De: C. F. Powell y G. P. S. Occhialini. « Nuclear Physics in Photographs ». Oxford, 1947.

Hoy en día, después de todo este trabajo previo, la tarea es mucho más fácil: las compañías Ilford y Kodak venden placas especiales, cuyas características son conocidas.

POWELL y otros aplicaron el método fotográfico al estudio de procesos nucleares, usando como proyectiles deuterones de 9,2 Mev. del ciclotrón de J. CHADWICK en Liverpool. Tienen mucho material todavía no elaborado. Después, POWELL y OCCHIALINI aplicaron el método al estudio de los rayos cósmicos. En este tiempo vino a Bristol CÉSAR LATTES.

Lattes se formó en el Instituto de Física en São Paulo. Trabajó con MARIO SCHÖNBERG y con GLEB WATAGHIN. Todavía hoy es asis-

tente de Wataghin. Hace dos años éste lo mandó, con una beca, a Bristol, donde, inmediatamente, se puso a aprender el nuevo método fotográfico con Powell y Occhialini. El año pasado lo enviaron en misión desde Bristol a Bolivia, para exponer placas a 5000 m de altura cerca de La Paz. Tales placas se exponen durante unas seis semanas. Al principio el número de efectos registrados crece

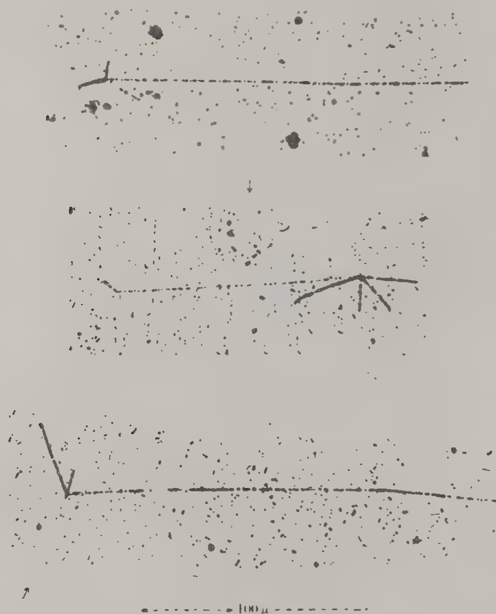


Fig. 3. — Desintegraciones nucleares producidas por deuterones de 160 MeV del ciclotrón de Berkely. De: C. F. Powell y G. P. S. Occhialini. « Nuclear Physics in Photographs ». Oxford, 1947.

proporcionalmente con el tiempo. Sin embargo, una estrella registrada por la placa se debilita poco a poco y, si antes de unas seis semanas no es revelada desaparece totalmente (fading effect). No se ganaría nada, pues, dejando las placas expuestas durante más del tiempo de fading. Después de haber sido expuestas se revelan las placas y se las examina, punto por punto, bajo el microscopio. Para examinar una sola placa de 9×12 cm², p. ej., un observador entrenado necesita unos 30 días de trabajo intensivo.

Cuando Lattes llegó de Bristol, de paso a Bolivia, yo estuve en Río de Janeiro, encargado de organizar, junto con J. LEITE LOPES un seminario. Conocí a Lattes el mismo día de su llegada. Me causó gran impresión. Naturalmente lo invitamos en seguida a contar algo en el seminario.



FIG. 4. — Desintegración de B por un neutrón rápido. De C. F. Powell y G. P. S. Occhialini, « Nuclear Physics in Photographs. Oxford, 1947.

No habíamos hecho ningún anuncio especial. Pero cuando llegamos a la pequeña aula de Costa Ribeiro, con la gran ventana contra el Pão de Açucar que distrae con bastante fuerza la atención del pizarrón, la salita estaba llena de gente. De alguna manera debe haberse difundido la noticia de que algo poco usual estaba pasando.

En la sala había esta atmósfera de expectación que se encuentra en un teatro antes de una función prometedora pero que casi nunca se siente en un aula.



FIG. 5 *a* — Trayectoria de un mesón. Powell y Occhialini. « Nature », απδ, 186, 1947

Lo que Lattes tuvo que contar era, realmente, muy interesante. Habló, primero, de las características de las distintas placas Ilford. Mostró trayectorias de partículas emitidas en transmutaciones de núcleos livianos: protones, partículas α y núcleos de retroceso, que se distinguen perfectamente uno de otro. Después mostró trayecto-

rias de mesones, mucho más largas y más finas que las de las partículas más pesadas. Un mesón recorre, en la emulión, algunos décimos de milímetro, durante un tiempo del orden de 10^{-12} sec. El método fotográfico permite registrar, luego, incluso partículas de vida muy corta, mientras que los otros métodos, arriba menciona-



FIG. 5 *b*. — Nacimiento de un mesón, durante una desintegración nuclear. Lattes, Muirhead, Occhialiny y Powell, « Naturea », 159, 694, 1947.

dos, no pueden registrar sino partículas de vida considerablemente más larga.

Y, finalmente, Lattes mostró las fotografías de un fenómeno nuevo que Powell, Occhialini y él habían encontrado: un mesón que al final de su trayectoria da origen a una nueva trayectoria de mesón con energía relativamente baja, ~ 5 MeV. En aquel entonces, el problema todavía no era unívoco, pero era muy curioso.

Podía ser, p. ej., que se trataba de una transformación nuclear exotérmica, p. ej.,



$$\mu^{\pm} + N_A^Z \longrightarrow N_A^{Z \pm 2} + \mu^{\mp}$$

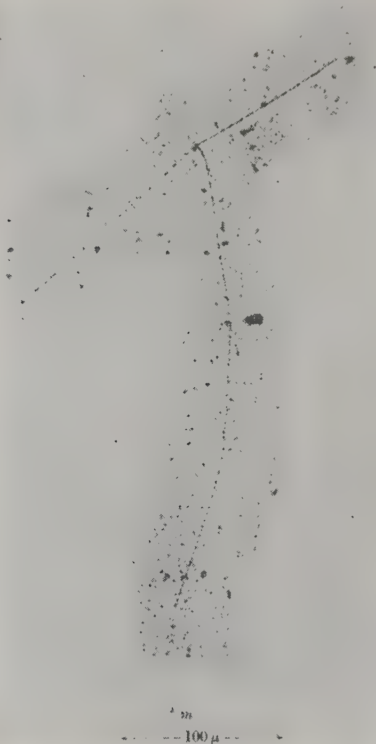


Fig. 5 c.— Muerte de un mesón negativo. Al final de su trayectoria, el mesón desintegra a un núcleo. Occhialini y Powell, » Nature », 159, 000, 1947.

Sin embargo, Powell, Occhialini y Lattes supusieron, ya entonces, que se trataba de un proceso elemental,

$$\mu_\pi \longrightarrow \mu_\mu + X$$

donde μ_π y μ_μ representan dos valores de masa distintos del mesón, con una diferencia de masa del orden

$$\mu_\pi - \mu_\mu \sim 100 \, . \, m_e$$

y donde X significa una partícula neutra desconocida que lleva la diferencia de energía e impulso y que tanto puede ser un fotón como un mesón neutro (neutretto). Fué la primera indicación experimental de que existen mesones de dos masas distintas, los que, ahora, se llaman mesones π y mesones μ.

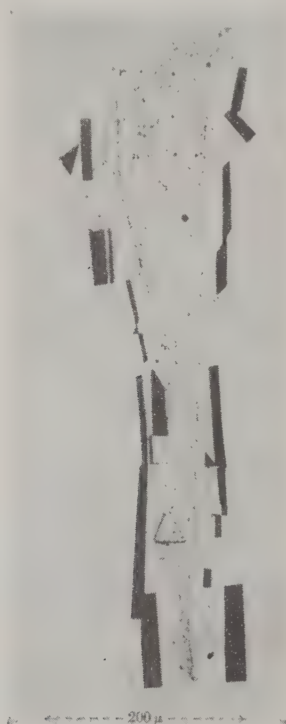


FIG. 6. — Transformación de un mesón π en mesón μ. Fotografía de Lattes, Muirhead, Occhialiny y Powell, « Nature », 159, 694, 1947.

Lattes se fué a Bolivia en un avión militar, puso las placas en un lugar cerca de La Paz y, a distintas profundidades, en el Lago Titicaca y volvió a São Paulo.

Ya algún tiempo antes los muchachos en La Plata habían empezado a exponer placas, pero habían encontrado dificultades. Yo quise que, mientras las placas de Lattes esperaban los impactos de-

los rayos cósmicos, Lattes fuera a Buenos Aires para ayudar a nuestros muchachos. Lattes estaba de acuerdo con mi proposición. Escribí al Decano y al Instituto de Física. El decano, como de costumbre, no contestó. Del Instituto me escribieron tres líneas: que no tenían dinero. Por suerte, uno de nuestros muchachos, con la ayuda del Dr. Platzek, logró vencer las dificultades solo. Aprendió la técnica, se consiguió un microscopio y ya tiene algún material de la Pampa de Achala (2150 m) y de Mendoza (4300 m).

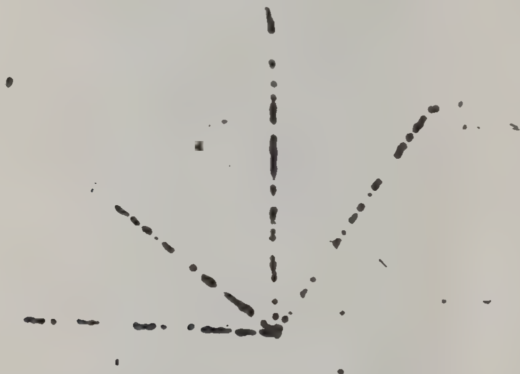


FIG. 7. — Mosaico de microfotografías de una « estrella ». Debido a la poca profundidad de foco de los objetivos de gran aumento, no es posible enfocar simultáneamente todas las trayectorias. De ahí la necesidad de sacar sucesivamente diferentes tramos y luego componer las distintas fotomicrografías para formar el mosaico. La operación equivale a proyectar la estrella sobre un plano paralelo a la superficie de la emulsión. Objetivo Zeiss 90 × de inmersión en aceite. Placa Kodak NTA expuesta durante 23 días en « El Cóndor », Pampa de Achala, provincia de Córdoba (2.100 m de altura). Fotografía original de D. Canals Frau, Córdoba, 1948.

Lattes volvió a Bolivia. Perdió quince días porque unos indios sediciosos no lo dejaron pasar y habían destruído algunas de las placas en el Lago Titicaca. Volvió a São Paulo y a Río. Tuvo mucho apuro, porque quiso revelar sus placas en Bristol. Yo estuve, en este momento en São Paulo. Lattes, por curiosidad, reveló una de sus placas allá. Cuando estuvo seca la puso bajo el microscopio. Le oí gritar y bajé para ver lo que sucedía. Lo que pasaba era, que por casualidad, a primera vista apareció en el campo del microscopio otro mesón π que se transformaba en μ.

Al principio del año corriente Lattes volvió a São Paulo y, por consejo de Wataghin, se fué a Berkeley donde el nuevo ciclotrón estaba a punto de ser terminado.

Tengo ahora, que explicar como funciona un ciclotrón. Es una máquina para acelarar partículas cargadas. Cuando se presentó el problema de acelerar partículas artificilmente hasta energías comparables con las de las partículas radioactivas y cósmicas, fué la idea de E. O. Lawrence de Berkeley, la que ganó la carrera.

Ustedes saben que en un campo magnético homogéneo H una partícula cargada, de velocidad v, describe un círculo cuyo radio ϱ se determina por la condición de que la fuerza centrífuga esté en equilbrio con la fuerza magnética,

$$\frac{mv^2}{\varphi} = e\frac{v}{c} \cdot H$$

De aquí fluye

$$v = \frac{e}{mc} H\varphi \quad \text{con} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

y para el tiempo T de una revolución

$$T = \frac{1}{2\pi\nu} = \frac{2\pi\varphi}{v} = \frac{2\pi mc}{eH}$$

$$\nu = \frac{e}{4\pi^2 mc} \cdot H$$

Mientras que m puede ser considerado constante, vale decir para velocidades pequeñas, la frecuencia en un campo homogéneo es constante, independiente de la velocidad de la partícula. Eso permite el trick de Lawrance:

Se inyecta, en el centro de la caja de fig. 8 una partícula con una velocidad inicial pequeña, estando la caja en un campo magnético perpendicular homogéneo. A las dos partes de la caja se aplica un campo alternado, de frecuencia ν, en fase con la frecuencia de la partícula en el campo magnético dado. Durante el pasaje entre las dos partes de la caja, la partícula se acelera y sigue viaje en un semicírculo de radio un poco mayor, después se aceleran otra vez, etc. La partícula describe, pues una trayectoria parecida a un espiral aumentando después de cada media vuelta su velocidad. Incluso en el caso que la diferencia de potencial entre las dos mitades de la caja sea muy pequeña, se puede llegar a velocidades muy

grandes, si una partícula da muchas revoluciones en el aparato. Teóricamente, la máquina debe funcionar hasta que se haga sentir la influencia relativista de la velocidad sobre la masa, quiere decir, para partículas pesadas (deuterones, partículas α) hasta 5 MeV. Durante algún tiempo se suponía, que eso era el límite del método.

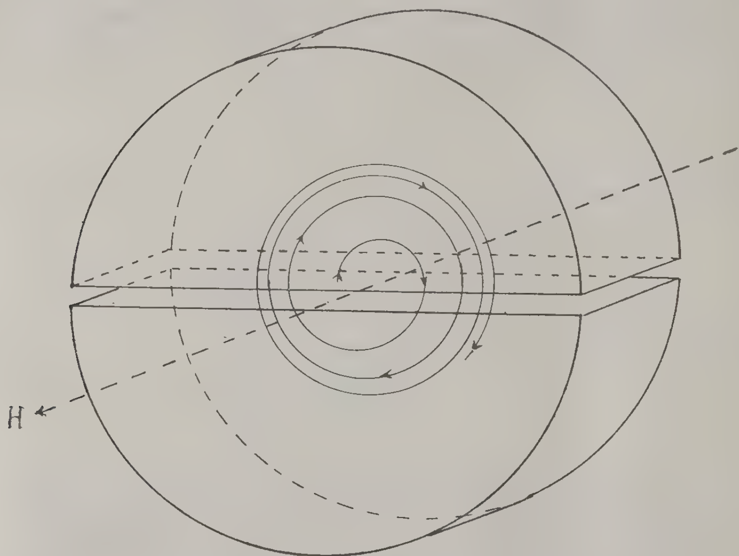


Fig. 8. — Esquema del funcionamiento del ciclotrón.

Conviene tomar un campo magnético *H* fuerte y, además, de grandes dimensiones para llegar a energías elevadas. Eso determina los gastos necesarios para construir una máquina tal. Se necesita un imán muy grande, con una masa de hierro del orden de 1000 toneladas. Con el hierro del último ciclotrón construído en Berkeley se hubieran podido construir dos destroyers! El profesor Svedberg contó que ellos consiguieron en Uppsala para el nuevo ciclotrón 600 toneladas del acero más fino de Suecia.

Lawrence trató de compensar, experimentalmente, la variación relativista de la masa cambiando el campo magnético de manera apropiada. Tuvo éxito y llegó, primero, hasta 25 MeV. Después se aplicó otro principio. En lugar de variar *H* se moduló la frecuen-

cia ν. El último ciclotrón de Berkeley es un tal ciclotrón a frecuencia modulada. Llega, para partículas α, hasta 380 MeV. OLIPHANT, en Birmingham, espera poder llegar hasta 1000 MeV.

La construcción del gran ciclotrón en Berkeley se terminó hace pocos meses. Lo maneja E. GARDNER, un colaborador de E. O. Lawrence. Trataron de averiguar si el ciclotrón en marcha emite mesones pero no llegaron a ninguna contestación positiva. Lattes llegó a Berkeley en febrero de este año. Colocó algunas placas en la parte negativa del haz de mesones a esperar emergiendo del blanco, donde las partículas α inciden (fig. 9). Una semana más tarde ya

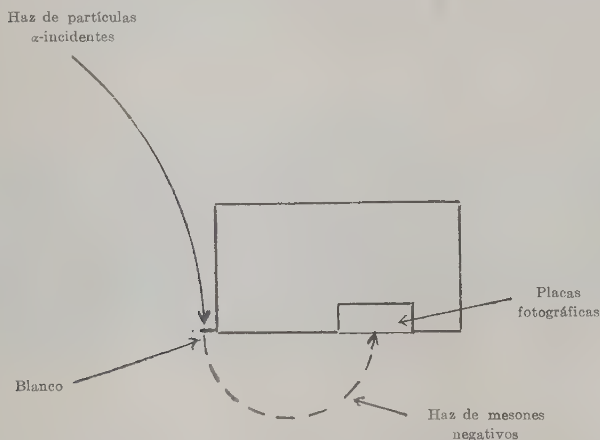


FIG. 9. — Producción artificial de mesones.

había encontrado en las placas un número elevado de trayectorias parecidas a las anteriormente obtenidas con rayos cósmicos. Escribió que el ciclotrón le permite registrar en 30 segundos más mesones que los rayos cósmicos en Bolivia en 5 meses.

Eso es la historia del descubrimiento de Gardner y Lattes que, después de la nota aparecida en el número de « Science » del 12 de marzo, pasó por toda la prensa mundial. Es verdad que había muchos elementos favorables y casuales. No obstante, el éxito era una retribución justa tanto para el joven investigador brasileño como para la escuela de Wataghin que lo formó.

En cuanto a los detalles que ya conocemos, los mesones se forman en número observable cuando la energía de las partículas α

incidentes supera 330 MeV. Eso es consistente con la idea, que un mesón se forma en el choque entre dos nucleones. De la curvatura de la trayectoria de los mesones negativos Gardner y Lattes obtuvieron el valor más exacto conocido de la masa de los mesones,

$$\mu_\pi = 313 \pm 16 \, . \, m_e$$

Este valor indica, para μ_μ un valor de aproximadamente 220 m_e. Los mesones negativos, π^-, estudiados por Gardner y Lattes pasan por la emulsión de las placas fotográficas o producen estrellas en la misma. No fueron observados hasta ahora, por transformación espontánea, mesones μ^-. Tenemos que concluir de este hecho, que los mesones π estudiados por Powell, Occhialini y Lattes son de carga positiva, π^+.

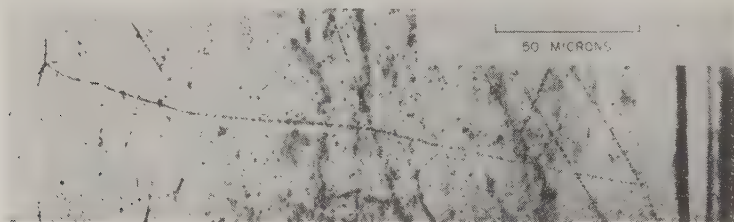


Fig. 10. — Mesón artificial que produce una estrella al final de su trayectoria. Gardner y Lattes, « Science », March 12th 1948.

Mientras que Gardner y Lattes prosiguen sus experiencias para acumular más material sobre la producción artificial de mesones, siguen las experiencias con rayos cósmicos. Powell y Occhialini mandaron placas hasta a 5000 m de altura en Africa. Obtuvieron un número considerable de fotografías y, en el último informe (Nature, 31 de julio de 1948) consideran, como esquema más probable de la producción de mesones en la radiación cósmica el siguiente:

Se supone que la radiación cósmica « primaria », la que llega desde afuera hacia la atmósfera terrestre, consiste en protones y neutrones rápidos, de origen todavía desconocido. Adoptando esta hipótesis, que todavía deja lugar a dudas, las partículas « primarias » chocan en la atmósfera con núcleos y forman estrellas. En estas estrellas nacen, además de partículas de menos alcance, mesones π de carga positiva y negativa.

Los mesones penetran por la atmósfera, los positivos son repelidos por los núcleos y se desintegran en el camino, después de un tiempo estimado en alrededor de 10^{-9} sec, en mesones μ positivos (y partículas neutras todavía no identificadas) que a su vez, después de un período medio de vida del orden de 10^{-6} sec se desintegran en partículas neutras y un positrón ordinario. Estos procesos no son observables en las emulsiones fotográficas, pero sí en una cámara de Wilson y por medio de contadores.

Los mesones π de carga negativa pueden, también, transformarse en el camino en mesones μ de igual carga. Sin embargo, también pueden penetrar en un núcleo desintegrándolo y dando origen a una estrella, observable en la mulsión fotográfica. Finalmente un mesón μ negativo, producto de una transformación del mesón π inicial, también puede penetrar en un núcleo y provocar una estrella.

Ustedes ven que la última sensación que hemos tenido en la física está estrechamente vinculada con los problemas de la radiación cósmica, con las fuerzas que mantienen los núcleos atómicos y que garantizan la estabilidad de la materia y con la estructura misma de los nucleones. Y ustedes ven que en esta sensación la América Latina ya ha sido representada en forma muy honorable. La conclusión final a la cual quiero llegar, no es sino una confirmación más de algo que ya sabíamos antes: Si se da, a los muchachos lo necesario para que aprendan y para que trabajen, entonces la cosa anda!...

INDICE GENERAL

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CIENTO CUATRIGÉSIMO SÉPTIMO

Pág.

ENRIQUE J. SAPORITI. — Contribución al conocimiento de la biología del Oso de lentes 3

ANTONIO MARTÍNEZ. — Notas coleoptorológicas II 13

M. VALENTINUZZI, L. E. COTINO y M. PORTNOY. — Potencial de óxido-reducción de la lactoflavina 45

ALFREDO JATHO. — La forma del cuerpo humano 78

AUGUSTO FERNÁNDEZ DÍAZ. — Situación del primer asiento de Santa Fe 93

JORGE A. BOFFI. — Efecto de la Cordillera de los Andes en la circulación general del aire sobre la República Argentina 126

MÁXIMO VALENTINUZZI, ABELARDO J. TEJO y HÉCTOR R. MAZZULLI. — Estudio de algunas propiedades del neoprontosil 141

CARLOS RUSCONI. — Acerca de una mandíbula de jaguar del ensenadense 189

MÁXIMO VALENTINUZZI. — Algunas cuestiones de biofísica tratadas por Antonio César Becquerel (1788-1878) 192

JOSÉ LIEBERMANN. — Segundo informe sobre el área permanente de *Schistocerca Cancellata* (Serville) en Chile 212

ALBERTO E. SAGASTUME BERRA. — Sobre la teoría de las funciones simétricas 235

GUILLERMO HOXMARK. — Las formaciones geológicas y las lluvias 254

SECCIÓN CONFERENCIAS:

ALBERT METRAL. — El atomismo, de Lucrecio a de Broglie 16

ENZIO LORENZELLI. — Acústica teatral y cinematográfica transformable 84

ANGEL CABRERA. — La zoología en la edad media y el descubrimiento del Nuevo Mundo 172

GUIDO BECK. — Sobre la producción artificial de mesones 263

J. L. M.: NECROLÓGICA - Lionel G. Dodds 231

BIBLIOGRAFÍAS .... 42 - 188 - 233